Auftriebseffekte in laminaren Grenzschichten an horizontalen Wänden

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur
genehmigt von der Fakultät für Maschinenbau
der Ruhr-Universität Bochum

von

Dipl.-Ing. Siegfried Schilawa

Bochum 1981

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549615_0037

Auftriebseffekte in laminaren Grenzschichten an horizontalen Wänden

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur
genehmigt von der Fakultät für Maschinenbau
der Ruhr-Universität Bochum

von
Dipl.-Ing. Siegfried Schilawa

Bochum 1981

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Referent: Prof. Dr.-Ing. K.Gersten

Koreferent: Priv.-Doz. Dr.-Ing. V.Vasanta Ram

Tag der mündlichen Prüfung: 2.12.1981

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1977 bis 1981 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am Institut für Thermo- und Fluiddynamik der Ruhr-Universität Bochum.

Ich möchte an dieser Stelle allen danken, die zum Zustandekommen dieser Arbeit beigetragen haben. Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. K.Gersten und Herrn Priv.-Doz. Dr.-Ing. V.Vasanta Ram für die Betreuung der Arbeit bzw. die Übernahme des Koreferats. Die vielen anregenden und kritischen Diskussionen mit ihnen waren bei der Erstellung dieser Arbeit besonders hilfreich.

Siegfried Schiele

Übersicht
==========

Es wird der Einfluß von Auftriebskräften infolge von Temperaturunterschieden in ebenen, laminaren Grenzschichten an horizontalen Wänden untersucht. Ausgehend von den Erhaltungsgleichungen für Strömungen an horizontalen Wänden bei kleinen Dichteänderungen wird eine angepaßte asymptotische Entwicklung für große Reynolds-Zahlen hergeleitet, die die Auftriebseffekte im Gegensatz zur Grenzschichttheorie Prandtls schon in der 1. Ordnung berücksichtigt. Reihenansätze sowie eine spezielle Transformation werden zur Lösung der Gleichungen 1. und 2. Ordnung vorgeschlagen. Schubspannung, Wärmeübergang und Druck an der Wand werden berechnet. Numerische Ergebnisse werden für 4 Beispiele - Staupunktströmung, längsangeströmte Platte, geheizter und heißer Wandstrahl - angegeben. Auftrieb vergrößert demnach die Wandschubspannung. Außerdem nimmt der Druck in der Grenzschicht durch Auftriebseffekte ab.

Inhalt

Verzeichnis der Formelzeichen

1. Einleitung 1

2. Mathematische Formulierung des Problems 7

2.1 Grundgleichungen 7

2.2 Randbedingungen 9

2.3 Wichtigste Ergebnisse 11

2.4 Statische Lösung 12

2.5 Boussinesq - Approximation 14

3. Herleitung des Gleichungssystems für große Reynolds-Zahlen 16

4. Grenzschichtlösung 1. Ordnung 25

4.1 Lösungen für kleine K 25

4.1.1 Entwicklung 25

4.1.2 Selbstähnliche Lösungen 26

4.2 Lösungen für große K 29

4.2.1 Entwicklung 29

4.2.2 Selbstähnliche Lösungen 33

4.3 Lösungen für mittlere K 35

4.3.1 Entwicklungen und Gleichungen 35

4.3.2 Lösungen 39

4.4 Untersuchung der Näherungen für kleine und große K 46

4.4.1 Gültigkeitsbereich 46

4.4.2 Verbesserungen der Näherungen 50

5. Außenströmung 2. Ordnung 55

6. Grenzschichtlösung 2. Ordnung 58

6.1 Lösungen für kleine K 58

6.2 Lösungen für große K 62

6.3 Lösungen für mittlere K 64

7. Beispiele 68

7.1 Staupunkt 68

7.2 Platte 69

7.3 geheizter Wandstrahl 74

7.4 heißer Wandstrahl 78

Zusammenfassung 83

Literatur 85

Verzeichnis der Bilder und Tabellen 88

Anhang 90

Verzeichnis der Formelzeichen

A	Faktor Gl (65)
a	Temperaturleitfähigkeit
a_s	Schallgeschwindigkeit
a	Singularität
Ar	Archimedes-Zahl
B	Faktor Gl (38), (49), (69), (73)
b	Faktor Gl (110), (121), (129)
$c_f = \frac{\tau_W}{\frac{1}{2} \rho U_B^2}$	Schubspannungsbeiwert
c_p, c_v	Wärmekapazitäten
C_W	Faktor Gl (65)
e, E	nichtlineare Transformation
E_o	Energiestromdichte
f, F, g, G	Ansatzfunktionen
F_o	external momentum flux
g	Fallbeschleunigung
I_o	Impuls
K, K_x	Parameter
L	Bezugslänge
m;n;r	Exponenten in Lösungsansätzen
N	Grenzschichtkoordinate
$Nu = \frac{q_W L}{\lambda T_B}$	Nusselt-Zahl
p, P	Druck
Pr	Prandtl-Zahl

Q	Volumenstrom
q	Wärmeübergang
Q, S	Funktionen Gl (41), (52)
Q	Rationalbruch
Re	Reynolds-Zahl
S	Reihensumme
U, V, u, v	Geschwindigkeitskomponenten
U_B	Bezugsgeschwindigkeit
T	Temperatur
T_B	Bezugstemperatur
x, y	Koordinaten

griechische Symbole

β	thermischer Ausdehnungskoeffizient
μ	Viskosität
ν	kinematische Viskosität
λ	Wärmeleitfähigkeit
ρ	Dichte
γ	Verhältnis der spezifischen Wärmen
τ_W	Wandschubspannung
ε	Entwicklungsparameter
η, ζ	Koordinaten
ε	Konvergenzradius

untere Indices

w	Wand
1, 2	Grenzschichtordnung Glieder der Entwicklung bzgl. K
11	1. Ordnung Grenzschicht und 1. Glied bzgl. K
A, ∞	Außen, Unendlich
R	Grenzschichtrand
c	zusammengesetzt
η, x, ζ	Ableitung nach $\hat{\eta}$, $\hat{x}$, $\hat{\zeta}$
P	Prandtl-Bezugsgrößen
S	Stewartson-Bezugsgrößen
F	Auftriebsbezugsgrößen

obere Indices

'	Ableitung nach η, ξ
-	Werte für kleine K
~	Werte für große K
^	Werte für mittlere K
*	dimensionsbehaftete Größen
**	Druckdifferenz gegenüber statischem Zustand

1. Einleitung

Für Strömungen bei großen Reynolds-Zahlen hat Ludwig Prandtl 1904 das Grenzschichtkonzept entwickelt. Bekanntlich haben die Gleichungen für Strömungen im Grenzfall $Re \to \infty$ keine für das gesamte Strömungsgebiet gleichmäßig gültige Lösung. Durch Aufteilen in einen wandnahen Grenzschichtbereich und einen von der Wand entfernten Außenteil mit unterschiedlichen Näherungen der Gleichungen, deren Lösungen an den gemeinsamen Grenzen aneinander anzupassen sind, hat Prandtl damals diese Schwierigkeit behoben. Ein wesentliches Merkmal dieses Konzepts von Prandtl, im folgenden klassische Grenzschichttheorie genannt, ist, daß in der Grenzschicht Kräfte senkrecht zur Hauptströmungsrichtung (senkrecht zur Wand) geringen Einfluß haben und daher unberücksichtigt bleiben dürfen. Bei der Behandlung von Auftriebseffekten in horizontalen Grenzschichten führt dies aber zu Schwierigkeiten; solche Effekte werden nämlich bei Prandtl vernachlässigt. Für die horizontale Wand liefert die klassische Grenzschichttheorie dasselbe Ergebnis mit und ohne Auftriebseffekte.
In den fünfziger Jahren begann man mit der systematischen Behandlung von asymptotischen Problemen, wie es auch die Strömungen bei großen Reynolds-Zahlen sind. Kaplun (1954), Cole und Lagerstrom (1955) haben sich als erste mit physikalischen Anwendungen beschäftigt. Es ent-

stand die Methode der angepaßten asymptotischen Entwicklungen (Matched asymptotic expansions). Prandtls Grenzschichtkonzept ließ sich als Lösung 1. Ordnung in eine solche Entwicklung der Navier-Stokes-Gleichungen für große Reynolds-Zahlen einbetten. Die Herleitung höherer Ordnungen dieser Entwicklung war damit möglich. Die Methode gestattet darüber hinaus die systematische Untersuchung, inwieweit Prandtls Vernachlässigungen zulässig waren.

Prandtls Konzept basiert auf einer von vielen mathematisch möglichen asymptotischen Entwicklungen für große Reynolds-Zahlen. Andere Entwicklungen sind denkbar, aber nur in bestimmten Fällen physikalisch sinnvoll. Stewartson (1958) hat eine von Prandtl abweichende Entwicklung für die freie Konvektionsströmung (Auftriebsproblem ohne erzwungene Konvektion) an einer horizontalen Wand angegeben. Eine weitere ist im Anhang A2 dieser Arbeit zu finden.

Als Anfang der sechziger Jahre die ersten Lösungen für die längsangeströmte horizontale Platte mit Auftrieb bei großen Reynolds-Zahlen veröffentlicht wurden, bedienten sich die Autoren Mori (1961) und Sparrow u.a. (1962) des Prandtl-Konzepts. Sie erweiterten dieses Konzept, indem sie im Gegensatz zu Prandtl die Auftriebskräfte senkrecht zur Wand in den Grenzschichtgleichungen beließen. Der Druck war damit nicht mehr konstant quer zur Grenzschicht; der Auftrieb erzeugte vielmehr einen Gradienten quer zur

Wand. An heißen Oberseiten entstand so ein Unterdruck in der Grenzschicht gegenüber dem Außendruck. In beiden Arbeiten wurde zur Lösung ein Reihenansatz für kleine Auftriebseffekte gewählt. Denselben Weg beschritten Hieber (1973) und Leal (1973). Sie untersuchten zusätzlich den Einfluß der Prandtl-Zahl. Andere Außenströmungen mit Potenzverhalten ($U \sim x^{m_1}$) haben Gill u. del Casal (1962) auf die gleiche Weise behandelt. Erst Chen u.a. (1977) ging von Reihenansätzen ab und löste die vollständigen modifizierten Grenzschichtgleichungen. Seine Lösung erstreckt sich jedoch nicht über den gesamten Bereich möglicher Auftriebskräfte, sondern bleibt auf kleine und mittlere Auftriebseffekte beschränkt. Für den gesamten Bereich berechnete Schneider (1978) einen Sonderfall der längsangeströmten Platte mit Auftrieb, der infolge einer bestimmte Verteilung der Wandtemperatur auf selbstähnliche Lösungen führt.

Gersten u. d'Avila (1977) gingen einen anderen Weg zur Erfassung der Auftriebseffekte an der längsangeströmten Platte. Sie lösten die Grenzschichtgleichungen 2. Ordnung und folgten damit Prandtl, die Kräfte senkrecht zur Wand in 1. Ordnung zu vernachlässigen. In ihrer Betrachtung sind Auftriebseffekte Effekte 2. Ordnung wie die Verdrängung (Effekt endlicher Grenzschichtdicke). Gersten u. Schilawa (1978) haben diese Betrachtung auf andere Beispiele ausgedehnt. Wegen der Linearität der Grenzschicht-

gleichungen 2. Ordnung sind ihre Ergebnisse für die Auftriebseffekte mit denen der Reihenansätze identisch. An ihren Beispielen zeigte sich, daß diese Betrachtungsweise unzulässig ist, sobald die Auftriebskräfte von der Größenordnung der Trägheitskräfte werden.
Im Gegensatz zum Prandtl-Konzept wurde die Stewartson-Entwicklung lange Zeit nicht zur Lösung von Auftriebsproblemen benutzt. So wurde sein Vorzeichenfehler erst 1965 von Gill u.a. (1965) korrigiert. Eine systematische Herleitung der Stewartson-Entwicklung haben Rotem u. Claasem (1969) angegeben. Die Stewartson-Entwicklung hat später Hieber (1973) für die Platte so erweitert, daß die Kombination von Anströmung und Auftrieb gerechnet werden konnte. Die Lösung erfolgte durch eine Reihenentwicklung diesmal für kleine Effekte der Anströmung. Hieber hat auch aus Reihenlösungen der beiden modifizierten Entwicklungen eine vollständige Lösung für den gesamten Bereich möglicher Auftriebs- und Trägheitskräfte durch graphische Interpolation gewonnen.

Diese kurze Literaturübersicht hat gezeigt, daß bisher nur grobe oder unvollständige Lösungen für Grenzschichtströmungen mit Auftrieb vorliegen. Einige Effekte können anhand dieser Lösungen nicht erklärt werden, wie z.B. der ablösende kalte Wandstrahl an Raumdecken. In der vorliegenden Arbeit soll deshalb versucht werden, die Lücke in der theoretischen Behandlung solcher Probleme zu

schließen. Dazu werden laminare Grenzschichtströmungen mit Auftrieb an horizontalen Wänden berechnet. Die Grundgleichungen dafür werden hergeleitet (Kap. 2). Ausgehend von diesen Gleichungen wird in Kap. 3 eine angepaßte asymptotische Entwicklung für große Reynolds-Zahlen angegeben, die die Auftriebseffekte durch entsprechende Wahl des Grenzprozesses schon in der 1. Ordnung berücksichtigt. Die Gleichungen 1. und 2. Ordnung sowohl für die Innen- als auch für die Außenlösung sind dort zu finden. In Kap. 4 werden die Grenzschichtlösungen 1. Ordnung gesucht. Entwicklungen für kleine und große Auftriebseffekte sowie eine spezielle Transformation für mittlere Auftriebseffekte werden vorgeschlagen. Schubspannung, Wärmeübergang und Druck an der Wand werden berechnet. Die Entwicklungen für kleine und große Werte des Auftriebsparameters werden noch auf Gültigkeitsgrenzen untersucht und Möglichkeiten zur Erweiterung der Gültigkeitsbereiche angegeben (Kap. 4.4). Ausgesuchte Beispiele werden zur Demonstration herangezogen. In Kap. 5 wird die Außenströmung 2. Ordnung berechnet. Anschließend werden die Grenzschichteffekte 2. Ordnung behandelt (Kap. 6). Auch hier werden kleine und große Auftriebseffekte gesondert betrachtet. Die spezielle Transformation aus der 1. Ordnung für mittlere Auftriebseffekte wird auch hier durchgeführt. Wieder sind Ergebnisse für Schubspannung, Wärmeübergang und Druck an der Wand gesucht. Abschließend werden in Kap. 7 numeri-

sche Ergebnisse für 4 Beispiele - Staupunktströmung, längsangeströmte Platte, geheizter und heißer Wandstrahl - unter Einfluß des Auftriebs berechnet. Im Anhang A1 werden am Beispiel der längsangeströmten Platte 2 mögliche Grenzschichtnäherungen (Prandtl und Stewartson) betrachtet. Daneben werden andere Näherungen anhand des Beispiels aufgezeigt und diskutiert. Dabei zeigt sich die Richtigkeit der Wahl des in Kap. 3 gemachten Grenzprozesses. Ebenfalls wird auf die Abhängigkeit zwischen der Wahl der Bezugsgrößen und der daraus resultierenden Näherungen bei einer Grenzschichtentwicklung eingegangen. Eine andere mögliche Grenzschichtentwicklung auf der Basis eines speziellen Bezugssystems wird in Kap. A2 untersucht. Mit der Methode der angepaßten asymptotischen Entwicklung wird systematisch aus den vollständigen Gleichungen ein spezielles Auftriebsgrenzschichtkonzept für horizontale Wände hergeleitet. Gleichungen und Variable entsprechen denen der Entwicklung in Kap. 3, obwohl Grenzschichtentwicklung und Transformation hier im Vergleich zu Kap. 3 vertauscht sind.

2. Mathematische Formulierung des Problems

2.1 Grundgleichungen

In dieser Arbeit werden ebene, stationäre und laminare Strömungen an horizontalen Wänden behandelt. Die Stoffwerte des Fluids - Viskosität μ, Wärmeleitfähigkeit λ, die spezifischen Wärmekapazitäten c_p und c_v, der thermische Ausdehnungskoeffizient β

$$\beta = -\frac{1}{\rho^*}\left(\frac{\partial \rho^*}{\partial T^*}\right)_{p^*}$$

und die Schallgeschwindigkeit a_s

$$a_s = \sqrt{\left(\frac{\partial p^*}{\partial \rho^*}\right)_s}$$

- sind als konstant angenommen. Für ein kartesisches Koordinatensystem mit der x*-Achse parallel zur Wand und der y*-Achse dazu senkrecht entgegen der Fallbeschleunigung g gerichtet lauten die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie, siehe z.B. Schlichting (1980)

$$\frac{\partial(\rho^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(\rho^* v^*)}{\partial y^*} = 0$$

$$\rho^*\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \mu\left\{\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x^*}\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right)\right\}$$

$$\rho^*\left(u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right) = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} - \rho^* g + \mu\left\{\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y^*}\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right)\right\}$$

$$\rho^* c_p\left(u^*\frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right) = \beta T^*\left(u^*\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial p^*}{\partial y^*}\right) + \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}\right) + \phi\mu \quad (1)$$

$$\phi = 2\left\{\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*}\right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right)^2\right\} + \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right)^2$$

Das Fluid sei durch folgende thermische Zustandsgleichung beschrieben

$$\rho^*(T^*,p^*) = \rho_o - \rho_o \beta_o (T^* - T_o) + \frac{\gamma}{a_s^2} (p^* - p_o) \qquad (2)$$

Darin ist $\gamma = c_p / c_v$ das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten. Gl (2) entspricht der Taylorentwicklung einer beliebigen Zustandsgleichung $\rho^*(T^*,p^*)$, bei der nur die linearen Glieder berücksichtigt wurden, siehe dazu Gersten und d'Avila (1977). Für kleine Abweichungen von Temperatur und Druck von den Bezugsgrößen stellt sie eine hinreichend genaue Näherung der allgemeinen Zustandsgleichung dar. Auf die Wahl des Bezugspunktes (Index o) wird später eingegangen. Damit stehen für die Berechnung der 5 Unbekannten $u^*(x^*,y^*)$, $v^*(x^*,y^*)$, $p^*(x^*,y^*)$, $T^*(x^*,y^*)$ und $\rho^*(x^*,y^*)$ 5 Gleichungen (Gln (1)-(2)) mit den 6 Konstanten ν, g, c_p, β, und γ/a_s^2 zur Verfügung. Zur Lösung benötigt man darüber hinaus die Randbedingungen des zu betrachtenden Strömungsproblems.

2.2 Randbedingungen

Die Randbedingungen sollen hier stellvertretend nur für die 4 Beispiele angegeben werden, die im Rahmen dieser Arbeit eingehender untersucht werden. Die Beispiele (siehe Bild 1) sind die Staupunktströmung (1), die längsangeströmte ebene Platte (2), der Wandstrahl entlang einer geheizten Wand ("geheizter Wandstrahl") (3) und der "heiße" Wandstrahl (4). Für alle Beispiele gilt die Haftbedingung

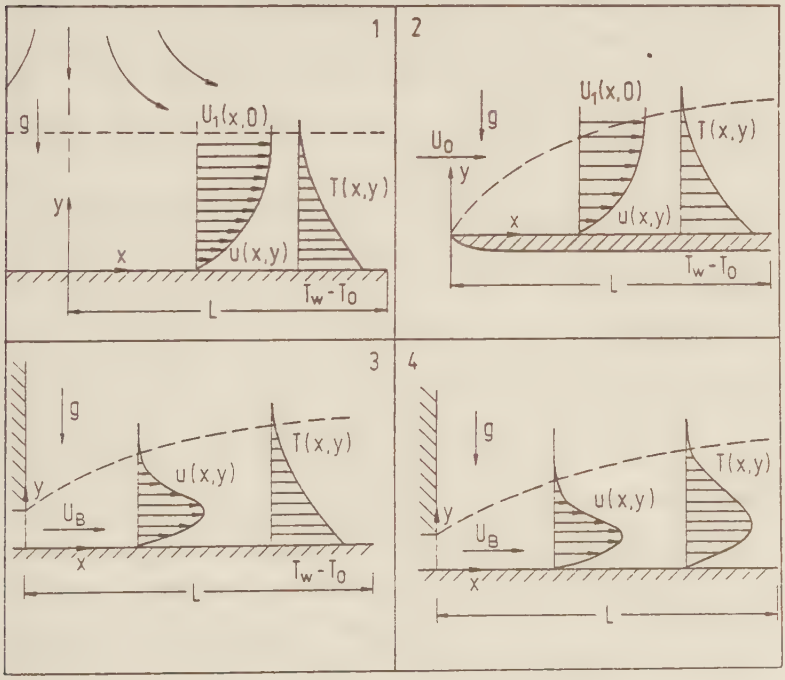

Bild 1: Beispiele

an der Wand ($u^* = v^* = o$). In großer Entfernung von der Wand ist die Geschwindigkeit beim Wandstrahl die der Umgebung, bei der Platte die der Anströmgeschwindigkeit und bei der Staupunktströmung wächst die Außengeschwindigkeit linear mit dem Abstand vom Staupunkt (Wandstrahl $u^* = o$; Platte $u^* = U_o$, Staupunkt $u^* = A^* x^*$). Druck und Temperatur entsprechen hier ebenfalls dem Umgebungszustand. Demgegenüber hat die Wand eine konstante Temperaturdifferenz zur Umgebung entweder ungleich Null (Staupunkt, Platte, Wandstrahl $T_W \neq T_o$) oder gleich Null (heißer Wandstrahl $T_W = T_o$). Beim Wandstrahl wird Fluid im Koordinatenursprung mit unendlichem Anfangsimpuls I_o und verschwindendem Volumenstrom Q_o in Bewegung gesetzt, wobei ihr Produkt $F_o = Q_o I_o$ endlich ist. Das Fluid des heißen Wandstrahls besitzt daneben einen Anfangsenergiestrom E_o. Somit lauten die Randbedingungen der Gln (1)-(2) für die 4 Beispiele:

1. Staupunkt

$|x^*| > o \quad y^* = o: u^* = v^* = o \quad T^* = T_W$

$y^* \to \infty: u^* = A^* x^* \quad T^* = T_o \quad p^* = p_o \quad \rho^* = \rho_o$

2.Ebene Platte

$x^* > o \quad y^* = o: u^* = v^* = o \quad T^* = T_W$

$y^* \to \infty: u^* = U_o \quad T^* = T_o \quad p^* = p_o \quad \rho^* = \rho_o$

$x^* < o: \quad u^* = U_o + o(1) \quad T^* = T_o \quad p^* = p_o \quad \rho^* = \rho_o$

3.geheizter Wandstrahl

$x^* > o \quad y^* = o: u^* = v^* = o \quad T^* = T_W$

$y^* \to \infty: u^* = o \quad T^* = T_o \quad p^* = p_o \quad \rho^* = \rho_o$

$x^* < o \quad u^* = o(1) \quad T^* = T_o \quad p^* = p_o \quad \rho^* = \rho_o$

$x^* = o \quad F_o = I_o Q_o = \int_0^\infty u^{*2}\, dy^* \cdot \int_0^\infty u^*\, dy^*$ 1)

4. heißer Wandstrahl

$x^* > o \quad y^* = o: u^* = v^* = o \quad T^* = T_o$

$y^* \to \infty: u^* = o \quad T^* = T_o \quad p^* = p_o \quad \rho^* = \rho_o$

$x^* < o \quad u^* = o(1) \quad T^* = T_o \quad p^* = p_o \quad \rho^* = \rho_o$

$x^* = o \quad F_o = I_o Q_o = \int_0^\infty u^{*2}\, dy^* \cdot \int_0^\infty u^*\, dy^*$ 1)

$E_o = \int_0^\infty u^* (T^* - T_o)\, dy^*$ 1)

2.3 Wichtigste Ergebnisse

Nach Lösung der Gln (1)-(2) unter Berücksichtigung der entsprechenden Randbedingungen des zu behandelnden Problems erhält man die 5 gesuchten Feldfunktionen $u^*(x^*,y^*)$, $v^*(x^*,y^*)$, $\rho^*(x^*,y^*)$, $T^*(x^*,y^*)$ und $p^*(x^*,y^*)$. Diese Funktionen sind außerdem noch von den 6 Konstanten (μ, λ, c_p, c_v, β und g) abhängig. Die Vielfalt der Lösung läßt es sinnvoll erscheinen, einige wenige Ergebnisse aus dieser großen Menge herauszugreifen, die die Lösung charakterisieren. Für die Praxis sind dies die Wandschubspannung $\tau_W(x^*)$, der Wärmeübergang an der Wand $q_W(x^*)$ und

1) siehe Text Seite 10

der Wanddruck $p_w(x^*)$.

$$\tau_w(x^*) = \mu \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)_{y^*=o}$$

$$q_w(x^*) = -\lambda \left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right)_{y^*=o}$$

Die ersten beiden Größen sind ein Maß für den Widerstand bzw die Aufheizung eines Körpers.

2.4 Statische Lösung

In den Gln (1)-(2) kommt der Druck nur in differentieller oder Differenzenform vor. Er läßt sich daher aus den Gleichungen nur bis auf eine additive Konstante bestimmen. Die Wahl dieser Konstanten steht frei, wenn in den Randbedingungen kein Absolutdruck vorgegeben ist. Daneben kann man natürlich auch eine Funktion von x* oder y* als Referenzdruck wählen. Dies muß dann jedoch in den Gleichungen bei den entsprechenden Ableitungen oder Differenzen berücksichtigt werden. Ein geeigneter Referenzdruck ist das statische Druckfeld. Denn so lassen sich Druckänderungen aufgrund der Bewegung des Fluids von den rein statischen ($u^* = v^* = o$) trennen. Der Auftriebseffekt ist damit in den statischen und den dynamischen Anteil unterteilbar.

Die Erhaltungsgleichungen für den statischen Zustand sind aus Gln (1)-(2) herleitbar.

$$\frac{\partial p_s}{\partial x^*} = 0 \tag{3a}$$

$$\rho_s \, g + \frac{\partial p_s}{\partial y^*} = 0 \tag{3b}$$

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} = 0 \tag{3c}$$

$$\rho_s = \rho_o - \rho_o \, \beta_o (T_s - T_o) + \frac{\gamma}{a_s^2} (p_s - p_o) \tag{3d}$$

Die Lösung für Druck, Dichte und Temperatur können nur von y* abhängig sein. Damit ergibt sich für die Temperatur sofort

$$T_s = T_o + \left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right)_o y^* \tag{4}$$

mit einem konstanten statischen Temperaturgradienten. Im folgenden soll jedoch angenommen werden, daß die Abweichungen der lokalen Temperatur T* von der Bezugstemperatur T_o klein sind. Daneben sind die Abmessungen des betrachteten Problems oft klein gegenüber typi-

schen Abmessungen im statischen Feld. Die Höhe der Standardatmosphäre H_o als ihre charakteristische Länge ist aber immer sehr viel größer als charakteristische Längen eines Umströmungsproblems, so daß gilt:

$$\frac{L}{H} = \frac{L}{a_{s/\gamma g}^2} << 1$$

Damit ergibt sich für das statische Feld die Lösung

$$T_s \simeq T_o \tag{5a}$$

$$p_s - p_o \simeq \frac{\rho_o a_s^2}{\gamma} \left(e^{-\frac{\gamma g}{a_s^2} y^*} - 1\right) \simeq - \rho_o g y^* \tag{5b}$$

$$\rho_s = \rho_o e^{-\frac{\gamma g}{a_s^2} y^*} \simeq \rho_o \tag{5c}$$

2.5 Boussinesq - Approximation

In dieser Arbeit sollen Strömungen mit kleinen Dichteänderungen betrachtet werden. Die thermische Zustands-

gleichung entsprechend Gl (2) ist für solche Probleme ausreichend genau. Sind Dichteänderungen klein verglichen mit der Dichte selbst, kann die Dichte näherungsweise als konstant angenommen werden. Das heißt aber nicht gleichzeitig, daß die Dichteänderung Null ist. Hierfür wird ebenfalls nur das 1. Glied der Taylor-Entwicklung Gl (2) berücksichtigt. Eine solche Näherung nennt man Boussinesq-Approximation. Redekopp und Charwat (1972) haben ihre Brauchbarkeit für kleine Dichteänderungen gezeigt. Berücksichtigt man außerdem in Gln (1)-(2) statt des Druckes p* die Druckdifferenz p** zum Druck des statischen Zustands aus Kap. 2.4

$$p^{**} = p^{*} - p_s(y^{*}) \tag{6a}$$

und

$$T_s = T_o \tag{6b}$$

$$p_s = p_o - \rho_o \, g \, y^{*} \tag{6c}$$

$$\rho_s = \rho_o \tag{6d}$$

so erhält man folgendes Gleichungssystem

$$\frac{\partial u^{*}}{\partial x^{*}} + \frac{\partial v^{*}}{\partial y^{*}} = 0 \tag{7a}$$

$$u^{*} \frac{\partial u^{*}}{\partial x^{*}} + v^{*} \frac{\partial v^{*}}{\partial y^{*}} = - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p^{**}}{\partial x^{*}} + \nu \left(\frac{\partial^2 u^{*}}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^{*}}{\partial y^{*2}} \right) \tag{7b}$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p^{**}}{\partial y^*} + g \beta_o (T^* - T_o) + \nu \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}\right) \tag{7c}$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = a \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}\right) \tag{7d}$$

Dabei ist

$$a = \frac{\lambda}{\rho_o c_p} \tag{8}$$

die Temperaturleitfähigkeit. Bei kleinen Geschwindigkeiten verglichen mit der lokalen Schallgeschwindigkeit konnten in Gl (7d) noch die Kompressionsarbeit bzw. die Reibungswärme vernachlässigt werden. Die Randbedingungen aus Kap. 2.2 sind von den Näherungen nicht betroffen.

3. Herleitung des Gleichungssystems für große Reynolds-Zahlen

Das im vorigen Kapitel hergeleitete Gleichungssystem (Gl (7)) soll für große Reynolds-Zahlen gelöst werden. Die Reynolds-Zahl Re

$$Re = \frac{U_B L}{\nu} = \frac{\text{Trägheit}}{\text{Reibung}} \tag{9a}$$

kennzeichnet in den Impulsgleichungen das Verhältnis von Trägheits- zu Reibungskräften. Da die kinematische Viskosität für Luft und Wasser sehr klein ist, ist die Annahme großer Reynolds-Zahlen in vielen praktischen Strömungsproblemen erfüllt. Die Reynolds-Zahl ist eine von mehreren dimensionslosen Kennzahlen des Problems. Außerdem tritt noch die Archimedes-Zahl Ar auf.

$$Ar = \frac{g\, L\, \beta_o\, T_B}{U_B^{\,2}} = \frac{\text{Auftrieb}}{\text{Trägheit}} \qquad (9b)$$

Sie ist ein Maß für die Größe der Auftriebseffekte im Vergleich zu den Trägheitskräften und gibt den Anteil von freier gegenüber erzwungener Konvektion an. Diese Kennzahlen tauchen im dimensionslos gemachten Gleichungssystem auf, wenn man geeignete Bezugsgrößen wählt. Die Bezugsgrößen U_B, L und T_B werden so ausgesucht, daß die Definitionen der Reynolds- und Archimedes-Zahl (Gl (9)) diese Verhältnisse richtig wiedergeben. Die Koordinaten werden dann mit der Bezugslänge L

$$x = \frac{x^*}{L} \qquad y = \frac{y^*}{L} \qquad (10)$$

die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors mit der Bezugsgeschwindigkeit U_B

$$u = \frac{u^*}{U_B} \qquad v = \frac{v^*}{U_B} \qquad (11)$$

die Druckdifferenz p** mit dem doppelten Staudruck der Bezugsgeschwindigkeit

$$p = \frac{p^{**}}{\rho_o U_B^2} \tag{12}$$

und die Temperaturdifferenz gegenüber dem statischen Zustand (siehe Kap. 2.4) mit der Bezugstemperatur T_B dimensionslos gemacht.

$$T = \frac{T^* - T_o}{T_B} \tag{13}$$

In den neuen Variablen lauten dann die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + Ar\ T + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \tag{14}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr\ Re}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Ihre Lösung ist neben den schon bekannten Parametern (Kennzahlen) Reynolds-Zahl Re und Archimedes-Zahl Ar noch von der Prandtl-Zahl Pr

$$Pr = \frac{\nu}{a} \tag{15}$$

abhängig. Die Randbedingungen der dimensionslosen Variablen behalten dieselbe Form wie in dimensionsbehafteten Variablen (Kap. 2.2).

Gesucht wird für Gl (14) eine Lösung für große Reynolds-Zahlen. Für solche Fälle hat sich das Grenzschichtkonzept von Prandtl bewährt. Dabei wird das Strömungsgebiet in eine wandnahe Schicht (Grenzschicht) und den Außenbereich unterteilt. Der Reibungseinfluß ist bei großen Reynolds-Zahlen sehr klein. Es wird deshalb ein Störungsansatz für u, v, p und T gemacht.

$$u(x, y, Re, Ar, Pr) = U_1(x, y, Ar, Pr) + \varepsilon(1/Re)\, U_2(x, y, Ar, Pr) + o(\varepsilon)$$

$$v(x, y, Re, Ar, Pr) = V_1(x, y, Ar, Pr) + \varepsilon(1/Re)\, V_2(x, y, Ar, Pr) + o(\varepsilon)$$

$$p(x, y, Re, Ar, Pr) = P_1(x, y, Ar, Pr) + \varepsilon(1/Re)\, P_2(x, y, Ar, Pr) + o(\varepsilon) \qquad (16)$$

$$T(x, y, Re, Ar, Pr) = T_{A1}(x, y, Ar, Pr) + \varepsilon(1/Re)\, T_{A2}(x, y, Ar, Pr) + o(\varepsilon)$$

Der Störparameter ε ist dabei eine Funktion der Größe 1/Re. Er wird später durch Anpassung beider Lösungen aneinander ermittelt. Das letzte Glied gibt die Größenordnung der vernachlässigten Restglieder an. Das kleine o weist darauf hin, daß die folgenden Glieder kleiner als die Größenordnung des Klammerausdrucks sind. Die obige Entwicklung gilt nur für die reibungslose

Außenströmung. Denn eingesetzt in Gl (14) ergeben die Glieder 1. Ordnung im Grenzfall $Re \to \infty$ die Eulerschen Bewegungsgleichungen. Die Euler-Gleichungen aber können die Haftbedingung ($u = o$) an der Wand nicht erfüllen. Aus diesem Grunde ist die obige Entwicklung für die Wandnähe nicht geeignet. Zur Erfüllung aller Randbedingungen muß zumindest jeweils eins der Glieder mit den höchsten Ableitungen erhalten bleiben. Dazu werden die Variablen y und v mit einer Potenz der Reynolds-Zahl gestreckt. Die Variablen x, u und T dürfen wegen der endlichen Randbedingungen keine Streckung erfahren. Um beim Grenzübergang $Re \to \infty$ nicht alle höchsten Ableitungen zu verlieren, muß man folgende Transformation vornehmen:

$$N = y \sqrt{Re}$$

$$v_1 = v \sqrt{Re} \tag{17}$$

Eine ähnliche Entwicklung wie Gl (16) sähe dann so aus:

$$\begin{aligned}
u\,(x, y, Re, Ar, Pr) &= \\
&u_1\,(x, N, Ar, Pr) + \varepsilon\,(1/Re)\,u_2\,(x, N, Ar, Pr) + o(\varepsilon) \\
v\,(x, y, Re, Ar, Pr) &= \\
&\frac{1}{\sqrt{Re}}\,[\,v_1\,(x, N, Ar, Pr) + \varepsilon\,(1/Re)\,v_2\,(x, N, Ar, Pr) + o(\varepsilon)\,] \\
p\,(x, y, Re, Ar, Pr) &= \\
&p_1\,(x, N, Ar, Pr) + \varepsilon\,(1/Re)\,P_2\,(x, N, Ar, Pr) + o(\varepsilon) \\
T\,(x, y, Re, Ar, Pr) &= \\
&T_1\,(x, N, Ar, Pr) + \varepsilon\,(1/Re)\,T_2\,(x, N, Ar, Pr) + o(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{18}$$

Das ergibt folgende Gleichungen 1. Ordnung vor dem Grenzübergang:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial N} = 0$$

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial N} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial N^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{Re}} \left(u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial N}\right) = -\sqrt{Re} \frac{\partial p_1}{\partial N} + Ar\, T_1 + \frac{1}{\sqrt{Re}} \frac{\partial^2 v_1}{\partial N^2} + \frac{1}{Re^{3/2}} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \qquad (19)$$

$$u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial T_1}{\partial N} = \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial N^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}\right)$$

Der Grenzübergang $Re \to \infty$ kann jedoch nicht durchgeführt werden, ohne daß die Größe der anderen Parameter bekannt ist. Diese können den Grenzprozeß entscheidend beeinflussen. Die Annahme endlicher Archimedes-Zahl würde z.B. den Auftrieb vernachlässigen, da dann das Auftriebsglied in den Impulsgleichungen beim Grenzübergang verschwinden würde. Der Auftrieb bleibt erhalten, wenn statt dessen der Parameter K

$$K = \frac{Ar}{\sqrt{Re}} \qquad (20)$$

festgehalten wird. Die Archimedes-Zahl muß dann auch in der Entwicklung (Gl (18)) durch den Parameter K ersetzt werden.

Nachdem so die 1. Ordnung festgelegt ist, kann der Störparameter ε bestimmt werden. Die vorliegende Entwicklung folgt der Methode der angepaßten asymptotischen Entwicklung. Für sie hat van Dyke (1965) Vorschriften zur Anpassung der Innen- an die Außenlösung und umgekehrt angege-

ben. Für ε ergibt sich daraus

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{Re}} \tag{21}$$

Dieser schon aus der klassischen Grenzschichtentwicklung ($K = o(1)$) bekannte Störparameter gilt also auch bei $K = O(1)$.

Die Gleichungen für die Außenströmung lauten dann

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0$$

$$U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + V_1 \frac{\partial U_1}{\partial y} = - \frac{\partial P_1}{\partial x}$$

$$U_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial y} = - \frac{\partial P_1}{\partial y} + Ar\, T_{A1} \tag{22}$$

$$U_1 \frac{\partial T_{A1}}{\partial x} + V_1 \frac{\partial T_{A1}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = 0$$

$$U_1 \frac{\partial U_2}{\partial x} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial x} + V_1 \frac{\partial U_2}{\partial y} + V_2 \frac{\partial U_1}{\partial y} = - \frac{\partial P_2}{\partial x}$$

$$U_1 \frac{\partial V_2}{\partial x} + U_2 \frac{\partial V_1}{\partial x} + V_1 \frac{\partial V_2}{\partial y} + V_2 \frac{\partial V_1}{\partial y} = - \frac{\partial P_2}{\partial y} + Ar\, T_{A2} \tag{23}$$

$$U_1 \frac{\partial T_{A2}}{\partial x} + U_2 \frac{\partial T_{A1}}{\partial x} + V_1 \frac{\partial T_{A2}}{\partial y} + V_2 \frac{\partial T_{A1}}{\partial y} = 0$$

Die Außenströmung ist demnach reibungslos und die Temperatur im Außenbereich konstant ($T_{A1} = T_{A2} = o$). Ist zusätzlich die Zuströmung homogen, so ist die Strömung dort drehungsfrei. Das Außengebiet ist dann in 1. und 2. Ordnung durch die Potentialgleichung beschreibbar:

$$\Delta\phi_1 = 0 \tag{24}$$

$$\Delta\phi_2 = 0 \tag{25}$$

mit

$$U_i = \frac{\partial\phi_i}{\partial x} \quad ; \quad V_i = \frac{\partial\phi_i}{\partial y} \qquad i = 1, 2 \tag{26}$$

Der Druck läßt sich dann nachträglich aus der Bernoulli-Gleichung

$$P_1 = -\frac{1}{2}\,(U_1^2 + V_1^2)$$

$$P_2 = -\,U_1 U_2 - V_1 V_2 \tag{27}$$

berechnen. Die Randbedingungen für das Außengebiet lauten:

$$y = o: \quad V_1 = o \qquad V_2 = \frac{d}{dx}\int_0^\infty (U_{1,R} - u)\,dN$$

$$y \to \infty: \quad U_1 = U_\infty \quad V_1 = V_\infty \quad U_2 = o \quad V_2 = o \tag{28}$$

Durch die Entwicklung Gl (18) für die Innenströmung erhält man nach Einsetzen und Ordnen nach Potenzen von ε die Grenzschichtgleichungen 1. und 2. Ordnung

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial N} = 0$$

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial N} = - \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial N^2}$$

$$0 = - \frac{\partial p_1}{\partial N} + K T_1 \qquad (29)$$

$$u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial T_1}{\partial N} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T_1}{\partial N^2}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial N} = 0$$

$$u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_2}{\partial N} + v_2 \frac{\partial u_1}{\partial N} = - \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial N^2}$$

$$0 = - \frac{\partial p_2}{\partial N} + K T_2 \qquad (30)$$

$$u_1 \frac{\partial T_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial T_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial T_2}{\partial N} + v_2 \frac{\partial T_1}{\partial N} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T_2}{\partial N^2}$$

mit den Randbedingungen

$$N = 0: \; u_1 = 0 \qquad v_1 = 0 \qquad T_1 = T_{1,W}$$

$$N \to \infty: \; u_1 = U_{1,R} \qquad p_1 = P_{1,R} \qquad T_1 = T_{A1} = 0 \qquad (31)$$

$$N = 0: \; u_2 = 0 \qquad v_2 = 0 \qquad T_2 = 0$$

$$N \to \infty: \; u_2 = U_{2,R} \qquad p_2 = P_{2,R} \qquad T_2 = 0 \qquad (32)$$

In den zu lösenden Gleichungen bleiben damit als Parameter nur die Prandtl-Zahl Pr und der Auftriebsparameter K.

4. Grenzschichtlösung 1. Ordnung

4.1 Lösungen für kleine K

4.1.1 Entwicklung

Grenzschichtlösungen 1. Ordnung sind durch Gln (29) beschrieben. Der Parameter K wird darin vorerst als klein angenommen. So kann für die Auftriebseffekte ein Störansatz in Form einer Potenzreihe des Störparameters K durchgeführt werden.

$$
\begin{aligned}
u_1(x, N, K, Pr) &= \bar{u}_1\ (x, N) + \sum_i K^i\, \bar{u}_{i+1}\ (x, N, Pr) \\
v_1(x, N, K, Pr) &= \bar{v}_1\ (x, N) + \sum_i K^i\, \bar{v}_{i+1}\ (x, N, Pr) \\
p_1(x, N, K, Pr) &= \bar{p}_1\ (x, N) + \sum_i K^i\, \bar{p}_{i+1}\ (x, N, Pr) \\
T_1(x, N, K, Pr) &= \bar{T}_1\ (x, N, Pr) + \sum_i K^i\, \bar{T}_{i+1}(x, N, Pr)
\end{aligned}
\qquad (33)
$$

Der Auftriebseffekt verschwindet somit bei dieser Entwicklung in den ersten Gliedern. Durch Einsetzen in Gln (29) und Ordnen nach Potenzen von K erhält man z.B. für die 1. und 2. Glieder dieser Entwicklung folgende Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial N} = 0 \\
\bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial N} &= -\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial N^2} \\
&\frac{\partial \bar{p}_1}{\partial N} = 0 \\
\bar{u}_1 \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial x} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial N} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \bar{T}_1}{\partial N^2}
\end{aligned}
\qquad (34)
$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial N} = 0$$

$$\bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial N} + \bar{v}_2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial N} = - \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial N^2}$$

$$0 = - \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial N} + \bar{T}_1 \qquad (35)$$

$$\bar{u}_1 \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial x} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial x} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial N} + \bar{v}_2 \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial N} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial N^2}$$

Die Differentialgleichungen für höhere Glieder der Entwicklung sind aus den Gliedern mit den entsprechenden höheren Potenzen von K zu bekommen. Die Randbedingungen sehen wie folgt aus:

$$N = 0 \quad \bar{u}_1 = 0 \quad \bar{v}_1 = 0 \qquad \bar{T}_1 = T_{1,w}$$

$$N \to \infty \quad \bar{u}_1 = U_{1,R} \qquad \bar{p}_1 = - \frac{1}{2} U_{1,R}^2 \quad \bar{T}_1 = 0$$

(35)

$$N = 0 \quad \bar{u}_2 = 0 \quad \bar{v}_2 = 0 \qquad \bar{T}_2 = 0$$

$$N \to \infty \quad \bar{u}_2 = 0 \qquad \bar{p}_2 = 0 \quad \bar{T}_2 = 0$$

Für die Gleichungen der ersten Glieder gelten demnach die Randbedingungen des vollständigen Problems; in allen höheren Ordnungen liegen homogene Randbedingungen vor.

4.1.2 Selbstähnliche Lösungen

Die 4 genannten Beispiele gehören zu Strömungen, die ohne Auftrieb zu selbstähnlichen Lösungen führen. Deshalb

wird hier die allgemeine Gruppe von Strömungen behandelt: die ohne Auftrieb selbstähnliche Lösungen haben. Dazu muß die Geschwindigkeit am Grenzschichtrand folgendem Potenzverhalten genügen:

$$U_1(x,o) = A\, x^{m_1} \tag{37}$$

(auch Sonderfall A = o (Wandstrahl))

Mit dem Lösungsansatz

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(x,N) &= x^{m_1} f_1'(\eta) \\ \bar{T}_1(x,N) &= x^{r_1} g_1'(\eta) \end{aligned} \tag{38}$$

unter Berücksichtigung der Ähnlichkeitsvariablen

$$\eta = \frac{N}{B\, x^n}$$

mit

$$n = \frac{1 - m_1}{2}$$

vereinfachen sich Gln (34) zu einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} f_1''' + B^2 (n + m_1) f_1 f_1'' - B^2 m_1 (f_1'^2 - f_{1,\infty}'^2) &= 0 \\ \frac{1}{Pr}\, g_1''' + B^2 (n + m_1) f_1 g_1'' - B^2 r_1 f_1' g_1' &= 0 \end{aligned} \tag{39}$$

mit den Randbedingungen

$\eta = o \quad f_1 = o \quad f_1' = o \qquad\qquad g_1' = g_W'$

$\eta \to \infty \qquad\quad f_1' = f_{1,\infty}' = A \;.\; g_1 = o \quad g_1' = o$

' bedeutet Differentiation nach η . B ist eine beliebige Konstante. Gl (39a) wird als Falkner-Skan-Gleichung bezeichnet, wenn

$$f'_{1/\infty} = 1$$

ist. Für diese Gleichung sind Lösungen bei einigen Werten von m_1 bekannt. Ansonsten bereitet die numerische Integration keine Schwierigkeit. Auch für die höheren Glieder der Entwicklung wird ein Ähnlichkeitsansatz gemacht

$$\begin{aligned} \bar{u}_i &= x^{m_i} f'_i(\eta) \\ \bar{T}_i &= x^{r_i} g'_i(\eta) \end{aligned} \tag{40}$$

und in die Differentialgleichungen der verschiedenen Glieder der Entwicklung eingesetzt. Die unbekannten Funktionen f_i und g_i ($i > 1$) kann man dann aus folgenden Gleichungssystemen ermitteln:

$$\begin{aligned} &f'''_i + B^2(n+m_1)f_1f''_i - B^2(m_1+m_i)f'_1f'_i + B^2(n+m_i)f''_1f_i = \\ &\qquad B^3(n+r_{i-1})g_{i-1} - B^3 n \eta g'_{i-1} + B^2\bar{S}_i \\ &\frac{1}{Pr}\, g'''_i + B^2(n+m_1)f_1g''_i - B^2 r_i f'_1 g'_i = B^2\bar{Q}_i \end{aligned} \tag{41}$$

mit

$$\bar{S}_i = \sum_{k=2}^{i-1} m_k\, f'_{i-k+1}\, f'_k - \sum_{l=2}^{i-1} (n+m_k)\, f_k\, f''_{i-k+1}$$

$$\bar{Q}_i = \sum_{k=1}^{i-1} r_k\, f'_{i-k+1}\, g'_k - \sum_{l=2}^{i} (n+m_k)\, f_k\, g''_{i-k+1}$$

$$m_i = m_1 + (i-1)\left(r_1 - \frac{5}{2}m_1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$r_i = r_1 + (i-1)\left(r_1 - \frac{5}{2}m_1 + \frac{1}{2}\right)$$

Dazu gehören die Randbedingungen (i > 1)

$$\eta = 0: \quad f_i = f_i' = \qquad g_i' = 0$$

$$\eta \to \infty: \qquad f_i' = g_i = g_i' = 0$$

Die Ergebnisse für Schubspannung, Wärmeübergang und Druck an der Wand sind

$$c_f \sqrt{Re} = \frac{2}{B} x^{\frac{3m_1 - 1}{2}} [f''_{1,W} + \sum_j (K x^{r_1 - \frac{5}{2}m_1 + \frac{1}{2}})^j f''_{j+1,W}]$$

$$\frac{Nu}{\sqrt{Re}} = \frac{1}{B} x^{\frac{2r_1 + m_1 - 1}{2}} [g''_{1,W} + \sum_j (K x^{r_1 - \frac{5}{2}m_1 + \frac{1}{2}})^j g''_{j+1,W}] \qquad (42)$$

$$\bar{p}_W = - x^{2m_1} [\tfrac{1}{2} f'_{1,} - B \sum_j (K x^{r_1 - \frac{5}{2}m_1 + \frac{1}{2}})^j g_{j,W}]$$

Diese Ergebnisse sind wie auch die in Gln (53), (79)-(81), (117), (125) und (134)-(136) nicht von der freien Konstanten B abhängig, da B auch die Lösungen von f_i und g_i beeinflußt.

4.2 Lösung für große K

4.2.1 Entwicklung

Die im Kap. 4.1 benutzte Entwicklung kann nur kleine Auftriebseffekte richtig beschreiben. Der andere Grenzfall, nämlich sehr große Werte von K, soll jetzt behandelt werden. Solche Fälle entsprechen sehr großen Auftriebskräften verglichen zu den Trägheitskräften.

Stewartson (1958) hat für diese Probleme eine andere Grenzschichtentwicklung benutzt. Er suchte eine Grenzschichtlösung für die freie Konvektionsströmung an einer halbunendlichen ebenen Platte. Seinen Vorzeichenfehler haben Gill u.a. (1965) korrigiert. Beide Arbeiten schlugen eine von Prandtl abweichende Streckung der Variablen vor. Auch die Bezugsgrößen unterscheiden sich. Hier soll jedoch die Lösung durch Entwicklung für große K aus den Grenzschichtgleichungen (Gl (29)) ermittelt werden. Eine solche Entwicklung zeigt ein ähnliches singuläres Verhalten wie die Grenzschichtentwicklung. Auch hier treten 2 Lösungsbereiche auf. In der Außenschicht sind Geschwindigkeit und Temperatur konstant. In der Innenschicht müssen auch hier die Variablen gestreckt werden, um die Degeneration der Gleichungen zu beseitigen. Da x und T endliche Randbedingungen haben, werden nur N, u, v und p transformiert. Dazu wird eine Potenz von K genommen. Das Prinzip minimaler Degeneration erfordert die Streckung

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x \\ \tilde{N} &= N \cdot K^{1/5} \\ \tilde{u} &= u_1 \cdot K^{-2/5} \\ \tilde{v} &= v_1 \cdot K^{-1/5} \\ \tilde{p} &= p_1 \cdot K^{-4/5} \\ \tilde{T} &= T_1 \end{aligned} \qquad (43)$$

Andere Transformationen sind möglich, da die Streckung von den endlichen Randbedingungen abhängig ist. Die vorlie-

gende ist vergleichbar mit dem Ergebnis einer Grenzschichtentwicklung für Auftriebsströmungen von Rotem u. Claassen (1969). Beim Grenzübergang $K \to \infty$ bleiben bei dieser Wahl alle Glieder aus Gl (29) erhalten. Die Gleichung ist formal identisch mit Gl (29) für $K = 1$. Die Variablen sind jedoch andere ebenso wie die Randbedingungen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{N}} &= 0 \\ \tilde{u}\,\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\,\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{N}} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{N}^2} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{N}} &= \tilde{T} \\ \tilde{u}\,\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\,\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{N}} &= \frac{1}{Pr}\,\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{N}^2} \end{aligned} \qquad (44)$$

$$\begin{aligned} \tilde{N} = 0 \quad \tilde{u} = 0 \quad \tilde{v} = 0 \qquad & \tilde{T} = T_{1,w} \\ \tilde{N} \to \infty \quad \tilde{u} = U_{1,R} \cdot K^{-2/5} \quad \tilde{p} = -\frac{1}{2}\,U_{1,R}^2\,K^{-4/5} \qquad & \tilde{T} = 0 \end{aligned}$$

In den Randbedingungen steckt hier der Effekt der erzwungenen Konvektion. Beim Grenzübergang verschwindet die eventuell inhomogene Randbedingung ($U_{1,R} \neq 0$) und damit der Einfluß der erzwungenen Konvektion. Diese Fälle haben Stewartson; Gill u.a. und Rotem u. Claassen betrachtet. Kleine Effekte von erzwungener Konvektion in freien Konvektionsströmungen lassen sich dann - ebenso wie in Kap. 4.1 die Auftriebseffekte - mit Reihenansätzen berechnen. Der Störparameter $\tilde{\varepsilon}$ dafür ist

$$\tilde{\varepsilon} = K^{-2/5} \qquad (45)$$

$$\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{N}, K, Pr) = \sum_i \tilde{\varepsilon}^{i-1}\, \tilde{u}_i(\tilde{x}, \tilde{N}, Pr)$$

$$\tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{N}, K, Pr) = \sum_i \tilde{\varepsilon}^{i-1}\, \tilde{v}_i(\tilde{x}, \tilde{N}, Pr)$$

$$\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{N}, K, Pr) = \sum_i \tilde{\varepsilon}^{i-1}\, \tilde{p}_i(\tilde{x}, \tilde{N}, Pr) \qquad (46)$$

$$\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{N}, K, Pr) = \sum_i \tilde{\varepsilon}^{i-1}\, \tilde{T}_i(\tilde{x}, \tilde{N}, Pr)$$

Durch Einsetzen in Gl (44) erhält man durch Ordnen nach Potenzen von $\tilde{\varepsilon}$ die Gleichungen der verschiedenen Glieder der Entwicklung. Im ersten Glied sind die Gleichungen mit der Ausgangsgleichung Gl (44) identisch. Für das 2. Glied lauten sie

$$\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial \tilde{N}} = 0$$

$$\tilde{u}_1 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}} + \tilde{u}_2 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_1 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{N}} + \tilde{v}_2 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{N}} = - \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial \tilde{N}^2} \qquad (47)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial \tilde{N}} = \tilde{T}_2$$

$$\tilde{u}_1 \frac{\partial \tilde{T}_2}{\partial \tilde{x}} + \tilde{u}_2 \frac{\partial \tilde{T}_1}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_1 \frac{\partial \tilde{T}_2}{\partial \tilde{N}} + \tilde{v}_2 \frac{\partial \tilde{T}_1}{\partial \tilde{N}} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \tilde{T}_2}{\partial \tilde{N}^2}$$

Die Randbedingungen dazu sind

$$\tilde{N} = 0 \quad \tilde{u}_1 = 0 \quad \tilde{v}_1 = 0 \qquad \tilde{T}_1 = T_{1,w}$$

$$\tilde{N} \to \infty \quad \tilde{u}_1 = 0 \qquad \tilde{p}_1 = 0 \quad \tilde{T}_1 = 0$$

$$\tilde{N} = 0 \quad \tilde{u}_2 = 0 \quad \tilde{v}_2 = 0 \qquad \tilde{T}_2 = 0 \qquad (48)$$

$$\tilde{N} \to \infty \quad \tilde{u}_2 = U_{1,R} \qquad \tilde{p}_2 = 0 \qquad \tilde{T}_2 = 0$$

In allen höheren Gliedern sind die Randbedingungen außer für den Druck im 3. Glied homogen.

4.2.2 Selbstähnliche Lösungen

Auch für den Fall großer K-Werte sollen selbstähnliche Lösungen gesucht werden. Für eine freie Konvektionsströmung werden kleine Effekte erzwungener Konvektion mit Hilfe des Störansatzes Gl (46) untersucht. Bei selbstähnlichen Lösungen, d.h. bei Temperaturen gemäß $T_W = x^{r_1}$ sowie einer Randbedingung für $U_{1,R}$ entsprechend Gl (37), kann man die Ansätze in Gl (46) durch Ähnlichkeitsansätze vervollständigen

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i &= \tilde{x}^{\tilde{m}_i} F_i'(\tilde{\eta}) \\ \tilde{T}_i &= \tilde{x}^{\tilde{r}_i} G_i'(\tilde{\eta}) \end{aligned} \tag{49}$$

mit der Ähnlichkeitsvariablen

$$\tilde{\eta} = \frac{\tilde{N}}{B\, \tilde{x}^{\tilde{n}}}$$

Die Exponenten $\tilde{m}_i$, $\tilde{r}_i$ und $\tilde{n}$ sind aus der $\tilde{x}$ - Abhängigkeit für die Temperatur im 1. Glied ($\tilde{r}_1$) und die Geschwindigkeit im 2. Glied ($\tilde{m}_2$) zu ermitteln.

$$\begin{aligned} \tilde{m}_i &= \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\tilde{r}_1 + (i-1)\ (\tilde{m}_2 - \frac{2}{5}\tilde{r}_1 - \frac{1}{5}) \\ \tilde{r}_i &= \tilde{r}_1 \qquad\quad + (i-1)\ (\tilde{m}_2 - \frac{2}{5}\tilde{r}_1 - \frac{1}{5}) \\ \tilde{n} &= \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\tilde{r}_1 \end{aligned} \tag{50}$$

Damit erhält man nach Einsetzen in Gln (44) und (47) bzw. in die Gleichungen noch höherer Glieder gewöhnliche Differentialgleichungen für F_i und G_i.

1. Glieder der Entwicklung

$$F_1''' + B^2(\tilde{n}+\tilde{m}_1)F_1F_1'' - B^2\tilde{m}_1F_1'^2 = B^3(\tilde{n}+\tilde{r}_1)G_1 - B^3\tilde{n}\,\tilde{\eta}\,G_1'$$

$$\frac{1}{Pr}\,G_1''' + B^2(\tilde{n}+\tilde{m}_1)F_1G_1'' - B^2\tilde{r}_1F_1'G_1' = 0$$

$$\tilde{\eta} = 0: \quad F_1 = 0 \quad F_1' = 0 \qquad G_1' = g_W' \tag{51}$$

$$\tilde{\eta} \to \infty: \qquad F_1' = 0 \quad G_1 = 0 \quad G_1' = 0$$

höhere Glieder (i > 1)

$$F_i''' + B^2(\tilde{n}+\tilde{m}_1)F_1F_i'' - B^2(\tilde{m}_1+\tilde{m}_i)F_1'F_i' + B^2(\tilde{n}+\tilde{m}_i)F_1''F_i =$$

$$B^3(\tilde{n}+\tilde{r}_i)G_i - B^3\tilde{n}\,\tilde{\eta}\,G_i' + B^2\tilde{S}_i$$

$$\frac{1}{Pr}\,G_i''' + B^2(\tilde{n}+\tilde{m}_1)F_1G_i'' - B^2\tilde{r}_iF_1'G_i' = B^2\tilde{Q}_i \tag{52}$$

$$\tilde{S}_i = \sum_{k=2}^{i-1} \tilde{m}_k\, F_{i-k+1}'\, F_k' - \sum_{l=2}^{i-1} (\tilde{n}+\tilde{m}_l)\, F_l\, F_{i-l+1}'' \qquad [-\tilde{m}_2\, f_{1,\infty}'^2]$$

$$\tilde{Q}_i = \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{r}_k\, F_{i-k+1}'\, G_k' - \sum_{l=2}^{i} (\tilde{n}+\tilde{m}_l)\, F_l\, G_{i-l+1}'' \qquad \text{nur bei i=3}$$

$$\tilde{\eta} = 0: \quad F_i = 0 \quad F_i' = 0 \qquad G_i' = 0$$

$$\tilde{\eta} \to \infty: \qquad F_i' = 0 \ (i\neq 2) \quad G_i = 0 \quad G_i' = 0$$

$$F_2' = f_{1,\infty}'$$

Aus diesen Gleichungssystemen lassen sich die Ergebnisse für Schubspannung, Wärmeübergang und Druck an der Wand berechnen. Es gilt *)

$$c_f\sqrt{Re} = \frac{2}{B}\,K^{\frac{3}{5}}\,x^{\frac{3}{5}\tilde{r}_1-\frac{1}{5}}\; F_{1,W}'' + \sum_j \left(x^{\tilde{m}_2-\frac{2}{5}\tilde{r}_1-\frac{1}{5}}\right)^j F_{j+1,W}''$$

$$\frac{Nu}{\sqrt{Re}} = \frac{1}{B}\,K^{\frac{1}{5}}\,x^{\frac{6}{5}\tilde{r}_1-\frac{2}{5}}\; G_{1,W}'' + \sum_j \left(x^{\tilde{m}_2-\frac{2}{5}\tilde{r}_1-\frac{1}{5}}\right)^j G_{j+1,W}'' \tag{53}$$

$$p_w - p_{1,R} = B\,K^{\frac{4}{5}}\,x^{\frac{4}{5}\tilde{r}_1+\frac{2}{5}}\; G_{1,W} + \sum_j \left(x^{\tilde{m}_2-\frac{2}{5}\tilde{r}_1-\frac{1}{5}}\right)^j G_{j+1,W}$$

*) siehe Kommentar Gl (42)

4.3 Lösung für mittlere K-Werte

4.3.1 Entwicklung und Gleichungen

Die bisher angegebenen Methoden haben die Lösung von GL (29) bedeutend vereinfacht. Sie sind jedoch nur bedingt einsetzbar, um Strömungen bei endlichen K-Werten zu berechnen (siehe Kap. 4.4). Gewöhnlich muß das vollständige partielle Gleichungssystem jeweils für alle interessierenden Kombinationen der Parameter K und Pr gelöst werden. Eine Ausnahme sind jedoch Strömungsprobleme, die sich durch das Fehlen einer geometrischen Länge auszeichnen. In solchen Fällen kann man durch Transformation der Variablen mit Potenzen eines eine Länge enthaltenden Parameters den entsprechenden Parameter eliminieren. Dies soll hier für den Parameter K durchgeführt werden. Mit den Ansätzen

$$x = \hat{x}\, K^{m_x}$$

$$N = \hat{y}\, K^{m_y}$$

$$\begin{aligned} u_1(x,N,K,Pr) &= \hat{u}(\hat{x},\hat{y},Pr) \cdot K^{m_u} \\ v_1(x,N,K,Pr) &= \hat{v}(\hat{x},\hat{y},Pr) \cdot K^{m_v} \\ p_1(x,N,K,Pr) &= \hat{p}(\hat{x},\hat{y},Pr) \cdot K^{m_p} \\ T_1(x,N,K,Pr) &= \hat{T}(\hat{x},\hat{y},Pr) \cdot K^{m_T} \end{aligned} \qquad (54)$$

erhält man nach Einsetzen in Gl (29) ein Gleichungssystem, dessen Glieder mit unterschiedlichen Potenzen von K multipliziert sind. Da jedoch für beliebige K alle Glieder er-

halten bleiben sollen, ergeben sich daraus 4 Beziehungen für die 6 unbekannten Exponenten.

$$m_u - m_x = m_v - m_y$$

$$2\,m_u - m_x = m_p - m_x = m_u - 2\,m_y \qquad (55)$$

$$m_p - m_y = m_T + 1$$

Das so entstandene Gleichungssystem

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} = 0$$

$$\hat{u}\,\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v}\,\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2}$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} = \hat{T}$$

$$\hat{u}\,\frac{\partial T}{\partial \hat{x}} + \hat{v}\,\frac{\partial T}{\partial \hat{y}} = \frac{1}{Pr}\,\frac{\partial^2 T}{\partial \hat{y}^2} \qquad (56)$$

$$\hat{x} = 0 \qquad \hat{u} = \hat{u}_o(\hat{y}) \qquad \hat{T} = \hat{T}_o(\hat{y})$$

$$\hat{y} = 0 \qquad \hat{u} = 0 \qquad \hat{v} = 0 \qquad \hat{T} = \hat{T}_w$$

$$\hat{y} \to \infty \qquad \hat{u} = \hat{U}_R \qquad \hat{p} = -\frac{1}{2}\,\hat{U}_R^2 \qquad \hat{T} = 0$$

muß also formal mit Gl (29) bei K = 1 übereinstimmen, nur die Variablen sind andere. Wie sie aussehen, entscheidet die freie Wahl von 2 der 6 Exponenten. Mit den 4 Beziehungen aus Gl (55) sind die Exponenten festgelegt. Für die Wahl möge die Platte als Beispiel dienen. Dort gilt:

$$\hat{u}(\hat{x}, \hat{y}\to\infty) = 1$$

$$\hat{T}(\hat{x}, \hat{y}=0) = 1 \qquad (57)$$

Eine sinnvolle Wiedergabe dieser Randbedingungen ist nur mit

$$m_u = o \tag{58a}$$

$$m_T = o \tag{58b}$$

möglich. Damit erhält man die Transformationsvorschrift

Platte:
$$\begin{aligned} x &= \hat{x}\, K^{-2} \\ y &= \hat{y}\, K^{-1} \\ u_1 &= \hat{u} \\ v_1 &= \hat{v}\, K^{-1} \\ p_1 &= \hat{p} \\ T_1 &= \hat{T} \end{aligned} \tag{59}$$

Natürlich sind andere Transformationen der Variablen möglich. Für den geheizten Wandstrahl z.B. ist weiterhin $m_T = o$ sinnvoll. Die Geschwindigkeit am Außenrand ist jedoch Null, so daß von daher jede Transformation zulässig ist. Für kleine K-Werte gilt aber

$$u \sim x^{-1/2} \tag{60}$$

Dies erfordert eine Streckung mit

$$m_u = -\frac{1}{2} m_x \tag{61}$$

Die vollständige Transformation ist dann

geheizter Wandstrahl:
$$\begin{aligned} x &= \hat{x}\, K^{-4/7} \\ y &= \hat{y}\, K^{-3/7} \\ u_1 &= \hat{u}\, K^{2/7} \\ v_1 &= \hat{v}\, K^{3/7} \\ p_1 &= \hat{p}\, K^{4/7} \\ T_1 &= \hat{T} \end{aligned} \tag{62}$$

Die Transformation für alle 4 Beispiele ist Tab. 1 zu entnehmen. Der Fall $\hat{x} \to o$ kann dabei erzwungene Konvektion ($K \to o$) oder freie Konvektion ($K \to \infty$) bedeuten. Entscheidend dafür ist das Vorzeichen von m_x. Für negative m_x entspricht $\hat{x} \to o$ der erzwungenen, $\hat{x} \to \infty$ der freien Konvektion. Statt einer Parameterdarstellung mit K hat man also eine Koordinatendarstellung in $\hat{x}$ (siehe dazu auch Anhang A2). Für alle K-Werte ist nur eine einzige Rechnung durchzuführen. Allen Lösungen aus Kap. 4 ist gemeinsam, daß eine von der Geometrie des Problems gegebene Bezugslänge fehlt. In solchen Fällen kann man also die all-

	Staupunkt	Platte	geheizter Wandstrahl	heißer* Wandstrahl
m_x	1/2	- 2	- 4/7	-0,83582
m_y	0	- 1	- 3/7	-0,62687
m_u	1/2	0	2/7	0,41791
m_v	0	- 1	3/7	0,62687
m_p	1	0	4/7	0,83582
m_T	0	0	0	0,46269

* $Pr = 0,7$

Tabelle 1: Spezielle Transformation für die 4 Beispiele

gemein gültige Parameterentwicklung auch durch eine Koordinatenentwicklung mit

$$\hat{x} = x\, K^{\frac{2}{2 r_1 - 5 m_1 + 1}} \tag{63}$$

ersetzen. Statt $\hat{x}$ kann man auch

$$K_x = K\, x^{r_1 - \frac{5}{2} m_1 + \frac{1}{2}} \tag{64}$$

verwenden; worin der Index x die Verknüpfung mit der Lauflänge symbolisiert. Lagerstrom u. Cole (1955) nennen solche Koordinaten dann "lokale" Parameter im Gegensatz zu den "globalen" Parametern Re und K. Alle Näherungen und Entwicklungen in Kap. 4 gingen von globalen Parametern aus. Man hätte aber auch direkt lokale Parameter verwenden können. Der Größe K entspräche dann K_x. Solche lokalen Parameter geben die lokalen Verhältnisses von Kräften wieder. Die Ausführungen über den lokalen Parameter und seine Folgerungen gelten sinngemäß auch für die Grenzschichtentwicklung 2. Ordnung (Kap. 6).

4.3.2 Lösungen

Die in dieser Arbeit zu behandelnden Beispiele haben keine geometrisch ausgezeichnete Länge. Zur Lösung wird daher statt Gl (29) Gl (56) benutzt. Die Randbedingungen

für die Geschwindigkeit und die Temperatur soll folgendem Potenzverhalten genügen:

$$U_{1,R} = A\, x^{m_1}$$
$$T_{1,W} = C_w\, x^{r_1} \tag{65}$$

Aufgrund der Randbedingungen gilt die Transformationsvorschrift

$$m_u = m_1\, m_x$$
$$m_T = r_1\, m_x \tag{66}$$

Damit ergibt sich in dieser Entwicklung für die Variablen die Streckung

$$x = \hat{x}\, K^{\frac{2}{5m_1 - 2r_1 - 1}}$$
$$N = \hat{y}\, K^{\frac{1 - m_1}{5m_1 - 2r_1 - 1}}$$
$$u_1(x,N,K,Pr) = \hat{u}(\hat{x},\hat{y},Pr)\; K^{\frac{2m_1}{5m_1 - 2r_1 - 1}}$$
$$v_1(x,N,K,Pr) = \hat{v}(\hat{x},\hat{y},Pr)\; K^{\frac{m_1 - 1}{5m_1 - 2r_1 - 1}} \tag{67}$$
$$p_1(x,N,K,Pr) = \hat{p}(\hat{x},\hat{y},Pr)\; K^{\frac{4m_1}{5m_1 - 2r_1 - 1}}$$
$$T_1(x,N,K,Pr) = \hat{T}(\hat{x},\hat{y},Pr)\; K^{\frac{2r_1}{5m_1 - 2r_1 - 1}}$$

Ohne Auftrieb lautete die Lösung bei Randbedingungen gemäß Gl (65) (vergl. Gl (38))

$$\bar{u}_1 = x^{m_1} f_1'(\eta)$$
$$\bar{T}_1 = x^{r_1} g_1'(\eta) \qquad (68)$$

Ein Ansatz für eine Lösung mit Auftrieb könnte demnach so aussehen:

$$\hat{u} = \hat{x}^{m_1} \hat{f}_\eta(\hat{x},\hat{\eta})$$
$$\hat{T} = \hat{x}^{r_1} \hat{g}_\eta(\hat{x},\hat{\eta}) \qquad (69)$$

mit

$$\hat{\eta} = \frac{\hat{y}}{B\,\hat{x}^n}$$

Dabei ist

$$n = \frac{1 - m_1}{2}$$

Der Index η bei den Variablen $\hat{f}$ und $\hat{g}$ steht für ihre Ableitung nach $\hat{\eta}$. Für die Variablen $\hat{f}$ und $\hat{g}$ erhält man aus Gln (56) und mit den Ansätzen Gl (69) folgendes partielles Gleichungssystem:

$$B^2 m_1(\hat{f}_\eta^2 - \hat{f}_{\eta,\infty}^2) + B^2\hat{x}(\hat{f}_\eta\hat{f}_{\eta x} - (\hat{f}_\eta\hat{f}_{\eta x})_\infty) -$$
$$- B^2[(n+m_1)\hat{f} + \hat{x}\,\hat{f}_x]\,\hat{f}_{\eta\eta} - \hat{f}_{\eta\eta\eta} +$$
$$+ B^3\,\hat{x}^{r_1 - \frac{5}{2}m_1 + \frac{1}{2}}\,[(n+r_1)\hat{g} + \hat{x}\,\hat{g}_x - n\,\hat{\eta}\,\hat{g}_\eta] = 0 \qquad (70)$$

$$B^2 r_1 \hat{f}_\eta\,\hat{g}_\eta + B^2\hat{x}\,\hat{f}_\eta\,\hat{g}_{\eta x} -$$
$$- B^2\,[(n+m_1)\hat{f} + \hat{x}\,\hat{f}_x]\,\hat{g}_{\eta\eta} - \frac{1}{Pr}\,\hat{g}_{r\eta\eta} = 0$$

Die Randbedingungen dazu sind

$$\hat{\eta} = o\text{:}\quad \hat{f} = o \qquad \hat{f}_{\eta} = o \qquad\qquad \hat{g}_{\eta} = g'_{1,W}$$

$$\hat{\eta} \to \infty\text{:} \qquad\qquad \hat{f}_{\eta} = f'_{1,\infty} \qquad \hat{g} = o \qquad \hat{g}_{\eta} = o$$

Der Index x ist Symbol für die Ableitung der so indizierten Variablen nach $\hat{x}$. Für

$$r_1 - \frac{5}{2} m_1 + \frac{1}{2} = - \frac{1}{m_x} > o \tag{71}$$

besteht der Vorteil eines solchen Ansatzes in der einfachen Berücksichtigung der Anfangswerte für $\hat{x} = o$. Dort geht das Gleichungssystem Gl (70) nämlich in Gln (39) über. Die Anfangslösung ist demnach der Fall ohne Auftrieb. Es gilt ($\hat{\eta} = \eta$)

$$\hat{f}(o,\hat{\eta}) = f(\eta) \tag{72a}$$

$$\hat{g}(o,\hat{\eta}) = g(\eta) \tag{72b}$$

Ist m_x jedoch positiv, ist die Anfangslösung ($\hat{x} = o$) die freie Konvektion. Lösungsansätze entsprechend den bei der freien Konvektionsströmung in Kap. 4.2 verwendeten (siehe Gl (49))

$$\hat{u} = \hat{x}^{\tilde{m}_1} \hat{F}_{\zeta}(\hat{x},\hat{\zeta})$$

$$\hat{T} = \hat{x}^{\tilde{r}_1} \hat{G}_{\zeta}(\hat{x},\hat{\zeta}) \tag{73}$$

mit

$$\hat{\zeta} = \frac{\hat{y}}{B\, \hat{x}^{\tilde{n}}}$$

sind dann zur einfachen Implementierung der Anfangslösung vorteilhaft. Das daraus resultierende Gleichungssystem lautet:

$$
\begin{aligned}
&B^2\tilde{m}_1(\hat{F}_\zeta^2 - \hat{F}_{\zeta,\infty}^2) + B^2\,\hat{x}\,[\hat{F}_\zeta\hat{F}_{\zeta x} - (\hat{F}_\zeta\hat{F}_{\zeta x})_\infty] - \\
&\quad - B^2[(\tilde{n}+\tilde{m}_1)\hat{F} + \hat{x}\,\hat{F}_x]\,\hat{F}_{\zeta\zeta} - \hat{F}_{\zeta\zeta\zeta} + \\
&\quad + B^3[(\tilde{n}+\tilde{r}_1)\hat{G} + \hat{x}\,\hat{G}_x - \tilde{n}\,\hat{\zeta}\,\hat{G}_\zeta] = o \\
&B^2\tilde{r}_1\hat{F}_\zeta\hat{G}_\zeta + B^2\hat{x}\,\hat{F}_\zeta\hat{G}_{\zeta x} - \\
&\quad - B^2[(\tilde{n}+\tilde{m}_1)\hat{F} + \hat{x}\,\hat{F}_x]\hat{G}_{\zeta\zeta} - \frac{1}{Pr}\,\hat{G}_{\zeta\zeta\zeta} = o
\end{aligned}
\qquad (74)
$$

$\hat{\zeta} = o$: $\hat{F} = o$ $\quad \hat{F}_\zeta = o$ $\quad \hat{G}_\zeta = g'_{1,W}$

$\hat{\zeta} \to \infty$: $\quad \hat{F}_\zeta = \hat{F}_{\zeta,\infty}$ $\quad \hat{G} = o$ $\quad \hat{G}_\zeta = o$

Darin ist

$$
\begin{aligned}
\tilde{n} &= \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\tilde{r}_1 \\
\tilde{m}_1 &= \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\tilde{r}_1 \\
\hat{G}_{\zeta,W} &= C_W = g'_{1,W} \\
\hat{F}_{\zeta,\infty} &= A\,\hat{x}^{m_1} - \frac{1}{5} - \frac{2}{5}r_1
\end{aligned}
\qquad (75)
$$

Gl (74) degenerieren bei freier Konvektion auf das Gleichungssystem Gl (51) des 1. Gliedes der natürlichen Konvektionsströmung. Das schließt auch die Randbedingung ein.

$$\hat{F}_{\zeta,\infty}(\hat{x}=o) = o \qquad (76)$$

Die Anfangslösung hängt als von m_x (Gl (71)) ab. Die Zuordnung nach Potenzen der Randbedingungen Gl (65) ist im

Bild 2 dargestellt. Oberhalb der eingezeichneten Linie ist die freie Konvektion; unterhalb die erzwungene Konvektion Lösung für $\bar{\hat{x}} = o$. Die Gleichungssysteme (56), (70) und (74) gelten jedoch alle für den gesamten $\hat{x}$-Bereich, was dem gesamten Bereich von K-Werten entspricht.

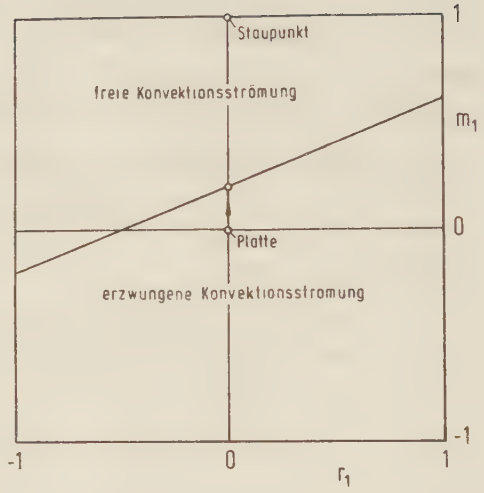

Bild 2: Abhängigkeit der Anfangslösung von den Exponenten der Randbedingungen

Neben der Implementierung der Anfangsbedingungen ist jedoch auch die numerische Integration aufgrund von Abbruch- und Approximationsfehlern von System zu System in bestimmten Bereichen einfacher oder schwieriger. Der Übergang von Gln (70) auf die Gln (74) oder umgekehrt ist aber an jeder beliebigen Stelle $\hat{x}$ möglich. Am einfachsten ist er aber an der Stelle

$$\hat{x} = 1 \qquad (77)$$

Dort ist

$$\hat{\eta} = \hat{\zeta}$$

$$\hat{f} = \hat{F} \qquad (78)$$

$$\hat{g} = \hat{G}$$

Anfangsbedingungen für die jeweils anderen Gleichungen sind dann die Bedingungen am Übergang.

Die Beziehungen für Wandschubspannung und Wärmeübergang bzw. Druck an der Wand lauten in den 3 Systemen: *)

$$c_f \sqrt{Re} = 2\, K^{m_u - m_y} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}}\right)_W$$

$$= \frac{2}{B} K^{\frac{3m_1 - 1}{5m_1 - 2r_1 - 1}} \hat{x}^{\frac{3m_1 - 1}{2}} \hat{f}_{\eta\eta}(\hat{x},o) \qquad (79)$$

$$= \frac{2}{B} K^{\frac{3m_1 - 1}{5m_1 - 2r_1 - 1}} \hat{x}^{\frac{r_1 - 1}{5}} \hat{F}_{\zeta\zeta}(\hat{x},o)$$

$$\frac{Nu}{\sqrt{Re}} = K^{m_T - m_y} \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}}\right)_W$$

$$= \frac{1}{B} K^{\frac{2r_1 + m_1 - 1}{5m_1 - 2r_1 - 1}} \hat{x}^{\frac{2r_1 + m_1 - 1}{2}} \hat{g}_{\eta\eta}(\hat{x},o) \qquad (80)$$

$$= \frac{1}{B} K^{\frac{2r_1 + m_1 - 1}{5m_1 - 2r_1 - 1}} \hat{x}^{\frac{6r_1 - 2}{5}} \hat{G}_{\zeta\zeta}(\hat{x},o)$$

$$p_{1,W} = K^{m_p} \hat{p}$$

$$= K^{\frac{4m_1}{5m_1 - 2r_1 - 1}} \left(-\frac{1}{2} \hat{x}^{2m_1} \hat{f}^2_{\eta,\infty} + B\, \hat{x}^{\frac{4}{5}r_1 + \frac{2}{5}} \hat{g}(\hat{x},o)\right) \qquad (81)$$

$$= K^{\frac{4m_1}{5m_1 - 2r_1 - 1}} \hat{x}^{\frac{4}{5}r_1 + \frac{2}{5}} \left(-\frac{1}{2} \hat{F}^2_{\zeta,\infty} + B\, \hat{G}(\hat{x},o)\right)$$

*) siehe Kommentar Gl (42)

4.4 Untersuchung der Näherungen für kleine und große K

4.4.1. Gültigkeitsbereiche

Aussagen über den Gültigkeitsbereich der Näherungslösungen lassen sich aus einer Auftragung der exakten mit der entsprechenden Näherungslösung aus Kap. 4 machen. Die Beschränkung der Aussagekraft bzgl. Gültigkeitsbereiche auf die gerechneten Beispiele mit selbstähnlichen Lösungen kann man beseitigen; indem man Gültigkeitsbeschränkungen an dem lokalen Parameter K_x orientiert. Die Übertragbarkeit auf den entsprechenden globalen Parameter im allgemeinen Fall sollte gewährleistet sein.
Am Wandstrahl mit konstanter Wandtemperatur soll stellvertretend die Näherung für kleine K untersucht werden. 5 Glieder der Reihenentwicklung wurden berechnet.

$$c_f \sqrt{Re}\, x^{5/4} = c_f \sqrt{Re}\, K^{-\frac{5}{7}} \hat{x}^{\frac{5}{4}} = \tag{82}$$
$$= \frac{2}{9} + 16{,}3028\, \hat{x}^{\frac{7}{4}} - 1282{,}45\, \hat{x}^{\frac{7}{2}} +$$
$$+ 287540\, \hat{x}^{\frac{21}{4}} - 142933376\, \hat{x}^{7}$$

In Bild 3 ist zusammen mit der exakten; d.h. aus den vollständigen Grenzschichtgleichungen erhaltenen Lösung die Lösung aufgetragen; die man jeweils bei Abbruch der Reihe nach dem ersten bis fünften Glied bekommt; mit S_1 bis S_5 bezeichnet. Ab einem bestimmten Wert $\hat{x}$ (ca. 0;05) versagt wie erwartet die Reihenentwicklung. Von Versagen spricht man dann; wenn die Verbesserung der Lösung durch das nächste Glied nicht mehr klein ist im Ver-

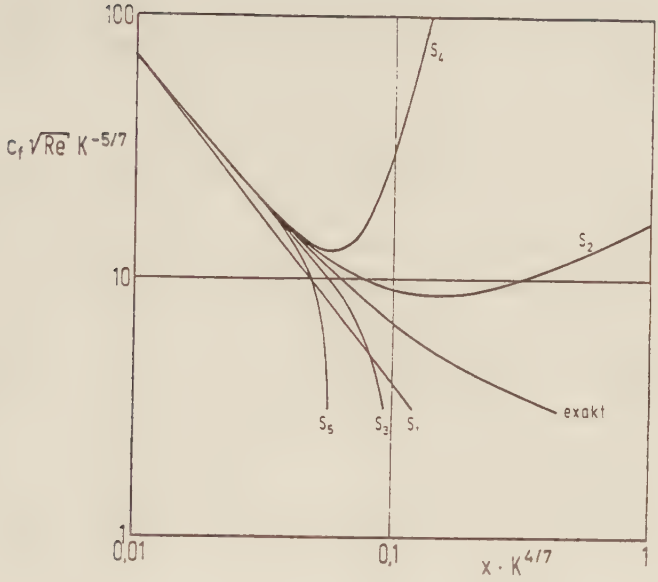

Bild 3: Reihensummen der Näherung für kleine K und exakte Lösung beim geheizten Wandstrahl (Pr = 0,7)

gleich zum vorherigen. Der Gültigkeitsbereich läßt sich so durch Vergleich zweier aufeinander folgender Glieder bestimmen; z.B.

$$2/9 > 16{,}3028\ \hat{x}^{7/4}$$

Allgemein gilt

$$|c_{i-1}| > |c_i\ \hat{x}^{\frac{7}{4}}| \qquad (83)$$

Darin sind c_i bzw. c_{i-1} der i-te bzw. (i-1)-te Koeffizient der Potenzreihe. Man erkennt; daß der Gültigkeitsbereich hier mit der Hinzunahme weiterer Glieder ständig

abnimmt. Aus einer von Domb-Sykes (1966) vorgeschlagenen Auftragung (Bild 4) kann man den Grenzwert für unendliche Reihen ermitteln.

$$\varepsilon_\infty = \hat{x}^{\frac{7}{4}} = \lim_{i\to\infty} \left| \frac{c_{i-1}}{c_i} \right| \tag{84}$$

Danach ist ε_∞ für dieses Beispiel sehr klein oder Null. Die Reihe ist nur im Grenzfall $\hat{x} \to 0$ gültig; es handelt sich um eine asymptotische Reihe. Dennoch zeigt der Vergleich der beiden ersten Glieder mit der vollständigen Lösung, daß für $\hat{x} < 0{,}005$ die Abweichungen nur einige Prozent betragen. Ein ähnliches Verhalten zeigt auch die längsangeströmte Platte. Auch ihre Näherungslösung ist nur für sehr kleine $\hat{x}$ gültig.

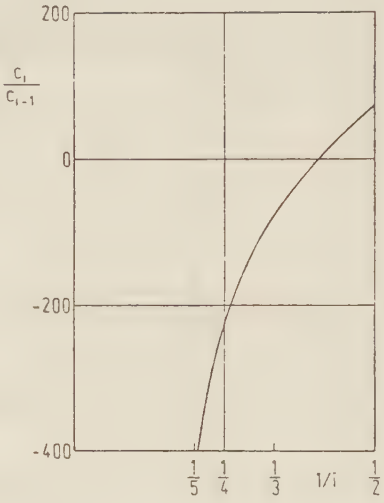

Bild 4: Domb-Sykes-Auftragung der Lösungsreihe des geheizten Wandstrahls (Pr = 0,7)

Etwas besser sieht das Verhalten der Reihenentwicklung für große K aus. Das soll am Beispiel der Plattenströmung gezeigt werden. Für die Wandschubspannung lautet die Lösungsreihe

$$c_f \sqrt{Re}\, K^{-\frac{3}{5}} x^{\frac{1}{5}} = c_f \sqrt{Re}\, K^{-1} \hat{x}^{\frac{1}{5}} = \tag{85}$$
$$= 1{,}9568 + 0{,}088542\, \hat{x}^{-\frac{1}{5}} + 0{,}30096\, \hat{x}^{-\frac{2}{5}}$$

In Bild 5 ist diese Lösung zusammen mit der exakten aus Kap. 4.3 aufgetragen. Auch diese Reihe hat nur einen endlichen Gültigkeitsbereich. Sie ist jedoch in der Anwendung nicht auf so enge Bereiche beschränkt wie die direkte Entwicklung. Die Differenz zur exakten Lösung beträgt selbst für $\hat{x} = 10^{-3}$ nur 16% und bei $\hat{x} = 10^{-2}$ 8,5%. Mehr Glieder können die Genauigkeit nicht verbessern. Vielmehr wird durch Hinzunahme eines weiteren Gliedes der Reihe der Fehler auf 489% bzw. 202% sehr stark erhöht. Man erkennt

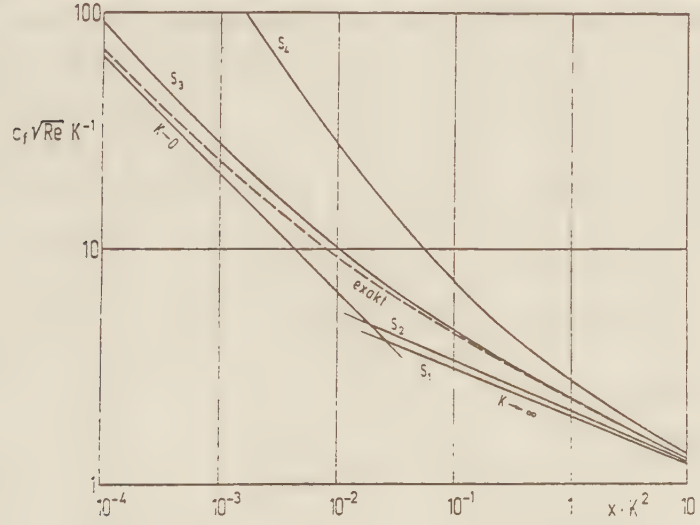

Bild 5: Reihensummen der Näherung für große K mit exakter Lösung für längsangeströmte Platte (Pr = 0,72)

daran, daß sich durch mehr Glieder der Reihe nicht immer eine höhere Genauigkeit erreichen läßt. Das zeigte auch das Beispiel Wandstrahl. Wann man die Entwicklung abbrechen muß, ist nur am einzelnen Beispiel zu entscheiden. Bei dieser Entscheidung ist das Verhalten der einzelnen Glieder hilfreich, z.B. Berechnung des Konvergenzradius der Reihe.

4.4.2 Verbesserungen der Näherungen

Legt man die Erkenntnisse des Kap. 4.4.1 zugrunde, wäre in einem großen Bereich von K die Behandlung des exakten Problems notwendig. Keine der beiden Entwicklungen, weder die direkte noch die inverse, gibt befriedigende Ergebnisse für mittlere $\hat{x}$-Werte. Ihre Konvergenzradien sind zu klein. Es gibt jedoch verschiedene Möglichkeiten sie zu vergrößern. Das soll am Beispiel Wandstrahl gezeigt werden. Unendlicher Konvergenzradius bleibt dennoch in praktischen Fällen ein Wunschtraum.

Die einfachste Möglichkeit der Konvergenzverbesserung ist die nichtlineare Transformation, wie sie Shanks (1955) vorgeschlagen hat.

$$e_1(S_n) = \frac{S_{n-1}\, S_{n+1} - S_n^2}{S_{n-1} + S_{n+1} - 2\, S_n} \qquad (86)$$

Darin sind S die Reihensummen bis zum im Index bezeichneten Glied. $e_1(S_n)$ bedeutet einmalig korrigierter Wert der Reihensumme bis zum n-ten Glied. Die Korrektur ist wiederholt durchführbar.

$$e_i(S_n) = \frac{e_{i-1}(S_{n-1})\; e_{i-1}(S_{n+1}) - e^2_{i-1}(S_n)}{e_{i-1}(S_{n-1}) + e_{i-1}(S_{n+1}) - 2\, e_{i-1}(S_n)} \qquad (87)$$

Die Ergebnisse S_1, $e_1(S_2)$ und $e_2(S_3)$ sind in Bild 6 mit der exakten Lösung verglichen. Daneben ist die Transformation nochmals auf obige Ergebnisse von S_1, $e_1(S_2)$ und $e_2(S_3)$ angewendet worden. Diese Lösung $E_1(S_2)$ befindet sich ebenfalls in Bild 6. Der Gültigkeitsbereich ist durch diese einfache Maßnahme stark ausgedehnt worden.

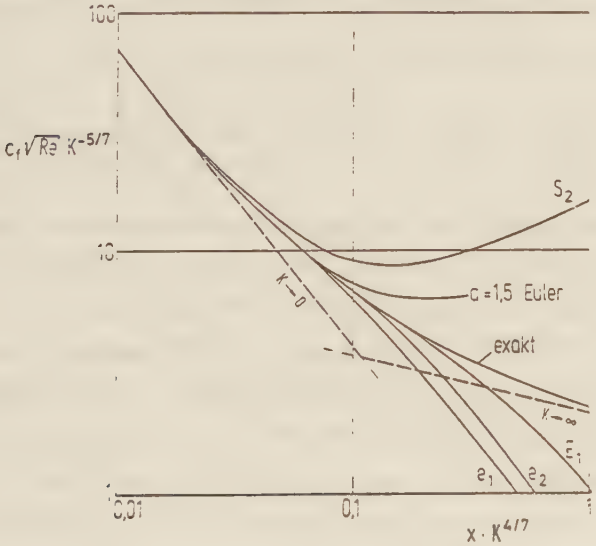

Bild 6: Verschiedene Verbesserungen der Näherungslösung für kleine K beim geheizten Wandstrahl (Pr = 0,7)

Keinerlei Information über die Lösung wie z.B. Konvergenzradius sind hierzu erforderlich. Bei Potenzreihen

$$S = 1 + a\,\varepsilon + b\,\varepsilon^2 + \ldots\ldots\ldots \tag{88}$$

mit der nichtlinearen Transformation identisch ist der Rationalbruch (van Dyke: rational fractions)

$$Q_3 = \frac{a - (a^2 - b)\varepsilon}{a - b\,\varepsilon}$$

Rationalbrüche mit mehr Gliedern geben oft auch eine sinnvolle Verbesserung der Näherung. Mit 5 Gliedern der Entwicklung

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\varepsilon^{i-1} \tag{89}$$

läßt sich folgender Rationalbruch bilden

$$Q_5 = \frac{S_1\,(a_3a_5 - a_4^2)\varepsilon^2 + S_2\,(a_4a_3 - a_5a_2)\varepsilon + S_3\,(a_2a_4 - a_3^2)}{(a_3a_5 - a_4^2)\varepsilon^2 + \quad (a_4a_3 - a_5a_2)\varepsilon + (a_2a_4 - a_3^2)} \tag{90}$$

Der Anwendungsbereich der Näherung entspricht dadurch etwa der nach der wiederholten nichtlinearen Transformation. Vorteil der bisherigen Methoden ist die Anwendbarkeit ohne näheren Einblick in die Lösung. Kenntnisse über die Lösungsreihe, vor allem über ihr Konvergenzverhalten, helfen jedoch bei der Verbesserung der Konvergenzeigenschaften. Eine Methode, die auf genauere Kenntnisse des Verhaltens der Näherungslösung zurückgreift, ist die Euler-Trans-

formation. Mit ihr kann man eine in der Lösung vorhandene Singularität im Endlichen ins Unendliche transformieren und damit die Konvergenzeigenschaft von einem endlichen auf einen unendlichen Konvergenzradius vergrößern. Die Lösungsreihe mit der Singularität bei $\varepsilon = -a$ wird dazu umgeschrieben in eine Potenzreihe in ε^*

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{a + \varepsilon} \tag{91}$$

Dies gilt bei einer einzigen Singularität. Bei mehreren Singularitäten läßt sich zwar die erste ins Unendliche transformieren, die Konvergenz der Lösung ist jedoch weiter durch die zweite beschränkt. In jedem Fall ist eine Verbesserung des Lösungsverhaltens zu erreichen. Für den Wandstrahl ist in Bild 6 die Lösung nach einer Euler-Transformation aufgetragen. Nachteil dieser Methode ist die Notwendigkeit den Konvergenzradius zu kennen. In Bild 6 ist er so bestimmt, daß die Transformation eine möglichst gute Übereinstimmung mit der exakten Lösung hat. Bisher war davon ausgegangen worden, daß entweder nur die Teillösung für kleine oder große Entwicklungsparameter vorlag. Sind jedoch beide bekannt, so liefert jede bis zum gemeinsamen Schnittpunkt die Lösung für mittlere Parameter mit für viele Abschätzungen ausreichender Genauigkeit (Bild 7). Beim Wandstrahl hat eine aus den ersten

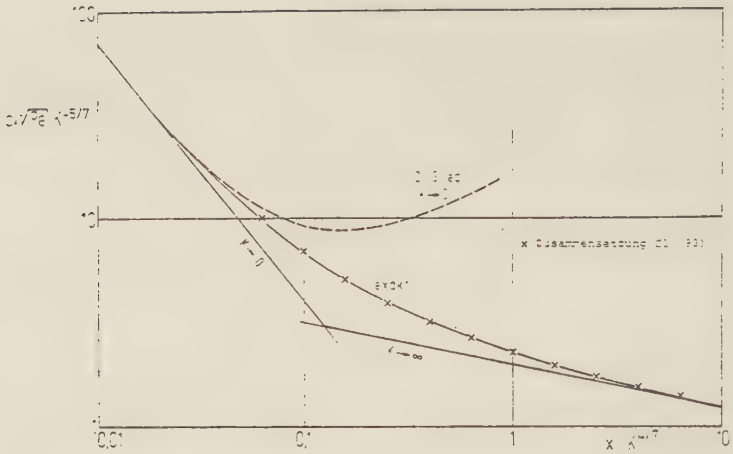

Bild 7: Lösungsverbesserungen mit den Näherungslösungen für kleine und große K beim geheizten Wandstrahl (Pr = 0,7)

Gliedern zusammengesetzte Lösung eine maximale Abweichung von 50% von der exakten Lösung. Damit läßt sich die Größenordnung festlegen. Diese einfache Zusammensetzung einer Lösung läßt sich in Anlehnung an die Methode der "Composite Expansions" (siehe van Dyke (1965)) vervollkommnen. Im Falle zweier Lösungen eines singulären Störungsproblems kann damit eine gleichmäßig gültige Lösung erzeugt werden. Bei der additiven Zusammensetzung z.B. addiert man beide Lösungen und subtrahiert den gemeinsamen Teil (Überlappungsbereich).

$$f_c^{(m,n)} = f_o^{(m)} + f_\infty^{(n)} - [f_\infty^{(n)}]_o^{(m)} \qquad (92a)$$

oder

$$f_c^{(m,n)} = f_o^{(m)} + f_\infty^{(n)} - [f_o^{(m)}]_\infty^{(n)} \qquad (92b)$$

m und n geben an, das wievielte Glied der Entwicklung berücksichtigt werden soll. Addiert man analog die 1. Glieder der Näherungslösungen für kleine und große K der Wandschubspannung des Wandstrahls, so ergibt sich

$$c_f \sqrt{Re}\, K^{-\frac{5}{7}} = \hat{x}^{-\frac{5}{4}} f''_{1,W} + \hat{x}^{-\frac{1}{5}} F''_{1,W} \qquad (93)$$

Der gemeinsame Teil wurde darin zu Null gesetzt. Die größte Abweichung einer solchen Lösung erhält man bei kleinen $\hat{x}$-Werten. Sie ist klein, wie man in Bild 7 sieht. Zusammen mit den 2. Gliedern der beiden Näherungen bekommt man so ein ausgezeichnetes Ergebnis im gesamten Koordinaten- bzw. Parameterbereich.

5. Außenströmung 2. Ordnung

In der vorliegenden Arbeit werden Außenströmungen 2. Ordnung behandelt, für welche die Potentialgleichung (Gl (25) und (26)) mit folgenden Randbedingungen gilt:

$$\begin{aligned} y &= o \qquad V_2 = h(x) \\ y &\to \infty \qquad U_2 = o \qquad V_2 = o \end{aligned} \qquad (94)$$

Im Sonderfall

$$\begin{aligned} h(x) &= o \qquad x < o \\ h(x) &= -C\, x^{-k} \qquad x > o \end{aligned} \qquad (95)$$

kann man eine Lösung der Potentialgleichung durch Übergang zur komplexen Darstellung sofort angeben. Mit der komplexen Koordinaten z

$$z = r\, e^{i\varphi} \tag{96}$$

lautet sie

$$V_2 - i\, V_2 = a/z^k \tag{97}$$

bzw.

$$\begin{aligned} U_2 &= C\, D \,/\, r^k \cdot \cos(k\varphi - k\pi) \\ V_2 &= C\, D \,/\, r^k \cdot \sin(k\varphi - k\pi) \end{aligned} \tag{98}$$

Aus den Randbedingungen für V_2 folgt

$$D = 1 \,/\, \sin k\pi \tag{99}$$

Bei Symmetrie bezüglich der y-Achse ist die Lösung bei symmetrischer Randbedingung aus der unsymmetrischen durch folgende Überlagerung erhältlich

$$\begin{aligned} U(x;y) &= U(x;y) - U(-x;y) \\ V(x;v) &= V(x;y) + V(-x;y) \end{aligned} \qquad x > o \tag{100}$$

Für beliebige Randbedingungen h(x) wird zur Lösung der Potentialgleichung die Singularitätenmethode angewandt. Bei dieser Methode wird die Lösung der Gleichung durch Überlagerung (Integration) beliebig vieler Teillösungen der Gleichung erzeugt. Als Teillösung wird die Quellströmung benutzt; die die Gleichung nicht aber die Randbedingung befriedigt. Die Quellen werden auf den Rändern des Strömungsgebietes angeordnet. In ihrer Summe muß die Gesamtlösung die Randbedingungen erfüllen. Eine Belegung mit Quellen ist aber nur dort notwendig, wo die

V-Komponente ungleich Null ist, da für die Quellstärke gilt:

$$q(x',y') = 2\, V_2(x',y') \tag{101}$$

Im vorliegenden Fall ist das also nur auf der horizontalen Wand erforderlich. Man erhält dann die Geschwindigkeitskomponenten aus einer Integration der induzierten Geschwindigkeiten aller Quellen am Boden (y' = o).

$$U_2(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{V_2(x',o)\,(x-x')}{(x-x')^2 + y^2}\,dx'$$

$$V_2(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{V_2(x',o)\;y}{(x-x')^2 + y^2}\,dx' \tag{102}$$

Für die Grenzschichtrechnung 2. Ordnung ist nur die U-Komponente am Boden interessant. In diesem Fall lautet Gl (102)

$$U_2(x,o) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(x')}{x-x'}\,dx' \tag{103}$$

Gl (103) kann numerisch integriert werden. Dazu muß jedoch die Singularität bei x = x' ausgenommen werden.

$$U_2(x,o) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x-\varepsilon_o} \frac{h(x')}{x-x'}\,dx' + \frac{1}{\pi}\int_{x+\varepsilon_o}^{\infty} \frac{h(x')}{x-x'}\,dx' + \frac{1}{\pi}\,I_o \tag{104}$$

mit

$$x' = x + \varepsilon$$

$$I_o = \int_{x-\varepsilon_o}^{x+\varepsilon_o} \frac{h(x')}{x-x'}\,dx' = -\int_{-\varepsilon_o}^{\varepsilon_o} \frac{h(x+\varepsilon)}{\varepsilon}\,d\varepsilon$$

Mit der Annahme

$$h(x+\varepsilon) = h(x) + A\,\varepsilon + B\,\varepsilon^2 + \ldots\ldots \qquad (105)$$

kann man das Integral I_o geschlossen lösen.

$$I_o = h(x-\varepsilon_o) - h(x+\varepsilon_o) \qquad (106)$$

Damit steht die unbekannte Randbedingung für die Grenzschichtrechnung 2. Ordnung zur Verfügung.

6. Grenzschicht 2. Ordnung

6.1 Lösungen für kleine K

Die in Kap. 4 angegebenen Lösungen 1. Ordnung sind asymptotische Lösungen für $Re \to \infty$. Bei großen, aber endlichen Reynolds-Zahlen kann man gemäß Gl (18) die Lösung durch Fortsetzung der Entwicklung aus Kap. 3 verbessern. Eine solche Fortsetzung soll jetzt durchgeführt werden. Die Grenzschichteffekte 2. Ordnung werden dabei durch Gl (30) beschrieben. Im Grenzfall $K \to o$ verschwinden die Auftriebseffekte wie bei der 1. Ordnung aus den Gleichungen. Deshalb wird wie in Kap. 4.1 ein Störansatz für die Auftriebseffekte gemacht.

$$\begin{aligned} u_2 &= u_{21} + K\,u_{22} + \ldots\ldots \\ v_2 &= v_{21} + K\,v_{22} + \ldots\ldots \\ p_2 &= p_{21} + K\,p_{22} + \ldots\ldots \\ T_2 &= T_{21} + K\,T_{22} + \ldots\ldots \end{aligned} \qquad (107)$$

Ähnlich wie die Variablen der 2. Ordnung in Gl (107) werden nachfolgend auch die Variablen 1. Ordnung aus Kap. 4.1 mit Doppelindices bezeichnet (u_{11}, u_{12}, v_{11}, v_{12} usw. statt $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ usw.). Der 1. Index kennzeichnet dann die Ordnung der Entwicklung nach Re, der 2. das Glied der Entwicklung in K. Ohne Auftriebseffekte (1. Glieder) muß folgendes Gleichungssytem

$$\frac{\partial u_{21}}{\partial x} + \frac{\partial v_{21}}{\partial N} = 0$$

$$u_{11}\frac{\partial u_{21}}{\partial x} + u_{21}\frac{\partial u_{11}}{\partial x} + v_{11}\frac{\partial u_{21}}{\partial N} + v_{21}\frac{\partial u_{11}}{\partial N} = -\frac{\partial p_{21}}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_{21}}{\partial N^2} \qquad (108)$$

$$\frac{\partial p_{21}}{\partial N} = 0$$

$$u_{11}\frac{\partial T_{21}}{\partial x} + u_{21}\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + v_{11}\frac{\partial T_{21}}{\partial N} + v_{21}\frac{\partial T_{11}}{\partial N} = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 T_{21}}{\partial N^2}$$

mit den Randbedingungen

$$N = 0: \; u_{21} = 0 \qquad v_{21} = 0 \qquad T_{21} = 0$$

$$N \to \infty: \; u_{21} = U_{2,R} \qquad p_{21} = p_{2,R} \qquad T_{21} = 0 \qquad (109)$$

gelöst werden. Hat die Außengeschwindigkeit $U_{2,R}$ ein Potenzverhalten ähnlich $U_{1,R}$ (siehe Gl (37))

$$U_{2,R}(x) = b\, x^{m_{21}} \qquad (110)$$

so sind wieder Ähnlichkeitsansätze für die Lösung möglich.

$$u_{21}(x,N) = b\, x^{m_{21}} f'_{21}(\eta)$$

$$T_{21}(x,N) = b\, x^{r_{21}} g'_{21}(\eta) \qquad (111)$$

$$r_{21} = r_1 + m_{21} - m_1$$

Für die Variablen η, u_{11} und T_{11} gelten die Ansätze aus Gl (38). Dadurch vereinfachen sich Gl (108) auf 2 gewöhnliche Differentialgleichungen

$$f_{21}''' + B^2(n+m_1)f_{11}f_{21}'' - B^2(m_1+m_{21})(f_{11}'f_{21}' - f_{1,\infty}') + B^2(n+m_{21})f_{11}''f_{21} = o$$

$$\frac{1}{Pr}\, g_{21}''' + B^2(n+m_1)f_{11}g_{21}'' - B^2 r_{21} f_{11}' g_{21}' = B^2 r_1 f_{21}' g_{11}' - B^2(n+m_{21})f_{21}g_{11}'' \qquad (112)$$

mit den Randbedingungen

$$\eta = o: \; f_{21} = o \quad f_{21}' = o \quad g_{21}' = o$$
$$\eta \to \infty: \quad f_{21}' = 1 \quad g_{21} = o \quad g_{21}' = o \qquad (113)$$

Kleine Auftriebseffekte können durch Einsetzen des Störansatzes Gl (107) in Gl (30) ermittelt werden. Damit lautet das Gleichungssystem für das 2. Glied der Entwicklung in K

$$\frac{\partial u_{22}}{\partial x} + \frac{\partial v_{22}}{\partial N} = o$$

$$u_{11}\frac{\partial u_{22}}{\partial x} + u_{22}\frac{\partial u_{11}}{\partial x} + v_{11}\frac{\partial u_{22}}{\partial N} + v_{22}\frac{\partial u_{11}}{\partial N} + u_{12}\frac{\partial u_{21}}{\partial x} + u_{21}\frac{\partial u_{12}}{\partial x} + v_{12}\frac{\partial u_{21}}{\partial N} + v_{21}\frac{\partial u_{12}}{\partial N} = -\frac{\partial p_{22}}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_{22}}{\partial N^2}$$

$$\frac{\partial p_{22}}{\partial N} = T_{21} \qquad (114)$$

$$u_{11}\frac{\partial T_{22}}{\partial x} + u_{22}\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + v_{11}\frac{\partial T_{22}}{\partial N} + v_{22}\frac{\partial T_{11}}{\partial N} + u_{12}\frac{\partial T_{21}}{\partial x} + u_{21}\frac{\partial T_{12}}{\partial x} + v_{12}\frac{\partial T_{21}}{\partial N} + v_{21}\frac{\partial T_{12}}{\partial N} = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 T_{22}}{\partial N^2}$$

Die dazugehörigen Randbedingungen sind homogen.

Sind die bisherigen Lösungen für K → o selbstähnlich, so

lassen sich die Variablen der zweiten Glieder der Entwicklung in K auch schreiben als

$$
\begin{aligned}
u_{22} &= b\, x^{m_{22}} f'_{22}(\eta) \\
T_{22} &= b\, x^{r_{22}} g'_{22}(\eta) \\
m_{22} &= m_{21} + r_1 - \tfrac{5}{2} m_1 + \tfrac{1}{2} \\
r_{22} &= m_{22} + r_1 - m_1
\end{aligned}
\tag{115}
$$

Es ergeben sich dann für f_{22} und g_{22} die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
&f'''_{22} + B^2(n+m_1) f_{11} f''_{22} - B^2(m_1+m_{22}) f'_{11} f'_{22} + \\
&\quad + B^2(n+m_{22}) f''_{11} f_{22} = B^3(n+r_{21}) g_{21} - B^3 n\, \eta\, g'_{21} - \\
&\quad - B^2(n+m_{12}) f_{12} f''_{21} + B^2(m_{12}+m_{21}) f'_{12} f'_{21} - \\
&\quad\quad - B^2(n+m_{21}) f''_{12} f_{21} \\
&\frac{1}{Pr}\, g'''_{22} + B^2(n+m_1) f_{11} g''_{22} - B^2 r_{22} f'_{11} g'_{22} - \\
&\quad - B^2 r_1 f'_{22} g'_{11} + B^2(n+m_{22}) f_{22} g''_{11} = \\
&\quad - B^2(n+m_{12}) f_{12} g''_{21} + B^2 r_{21} f'_{12} g'_{21} + \\
&\quad + B^2 r_{12} f'_{21} g'_{12} - B^2(n+m_{21}) f_{21} g''_{12}
\end{aligned}
\tag{116}
$$

mit homogenen Randbedingungen.

Für die Wandschubspannung und den Wärmeübergang bzw. Druck an der Wand ergibt sich daraus

$$
\begin{aligned}
c_{f2}\, Re &= \frac{2\,b}{B}\, x^{m_{21}-n} \left[f''_{21,W} + K\, x^{r_1 - \frac{5}{2} m_1 + \frac{1}{2}} f''_{22,W} \right] \\
Nu_2 &= \frac{b}{B}\, x^{r_{21}-n} \left[g''_{21,W} + K\, x^{r_1 - \frac{5}{2} m_1 + \frac{1}{2}} g''_{22,W} \right] \\
p_{W2}\, Re &= -\, b\, x^{m_1 + m_{21}} \left[f'_{1,\infty} f'_{21,\infty} + r_1 - \tfrac{5}{2} m_1 + \tfrac{1}{2} \right. \\
&\qquad \left. + B\, K\, x \qquad\qquad g_{21,W} \right]
\end{aligned}
\tag{117}
$$

6.2 Lösung für große K

Eine ähnliche Betrachtung soll auch für den Fall $K \to \infty$ gemacht werden. Das Problem, gegeben durch Gl (30), ist dann ebenso wie das der 1. Ordnung singulär. Wie dort kann man durch eine Transformation der Variablen die Degeneration der Gleichungen verhindern. Die Transformation der Variablen 2. Ordnung ist jedoch nicht mit der der entsprechenden Variablen in der 1. Ordnung identisch. Mit den hier so gestreckten Variablen

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{21} &= T_2 \, K^{\frac{1}{5}} \\ \tilde{u}_{21} &= u_2 \, K^{-\frac{1}{5}} \\ \tilde{v}_{21} &= v_2 \\ \tilde{P}_{21} &= p_2 \, K^{-\frac{3}{5}} \end{aligned} \tag{118}$$

eingesetzt in Gl (30) bekommt man das Gleichungssystem

$$\frac{\partial \tilde{u}_{21}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}_{21}}{\partial \tilde{N}} = 0$$

$$\tilde{u}_1 \frac{\partial \tilde{u}_{21}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{u}_{21} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_1 \frac{\partial \tilde{u}_{21}}{\partial \tilde{N}} + \tilde{v}_{21} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{N}} = - \frac{\partial \tilde{P}_{21}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{21}}{\partial \tilde{N}^2} \tag{119}$$

$$\frac{\partial \tilde{P}_{21}}{\partial \tilde{N}} = \tilde{T}_{21}$$

$$\tilde{u}_1 \frac{\partial \tilde{T}_{21}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{u}_{21} \frac{\partial \tilde{T}_1}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_1 \frac{\partial \tilde{T}_{21}}{\partial \tilde{N}} + \tilde{v}_{21} \frac{\partial \tilde{T}_1}{\partial \tilde{N}} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \tilde{T}_{21}}{\partial \tilde{N}^2}$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \tilde{N} = 0 \quad \tilde{u}_{21} = 0 \qquad \tilde{v}_{21} = 0 \qquad \tilde{T}_{21} = 0 \\ \tilde{N} \to \infty \quad u_{21} = \tilde{U}_{2,R} \qquad \tilde{P}_{21} = 0 \quad \tilde{T}_{21} = 0 \end{aligned} \tag{120}$$

Die Gleichungen sind wie auch bei der 1. Ordnung formal identisch mit denen beim Fall K = 1 in Gl (30).

Im Sonderfall

$$\tilde{U}_{2,R} = \tilde{b}\,\tilde{x}^{\tilde{m}_{21}} \tag{121}$$

sind auch hierfür selbstähnliche Lösungen möglich. Der Lösungsansatz

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{21}(\tilde{x},\tilde{N}) &= \tilde{b}\,\tilde{x}^{\tilde{m}_{21}} F'_{21}(\tilde{\eta})\\ \tilde{T}_{21}(\tilde{x},\tilde{N}) &= \tilde{b}\,\tilde{x}^{\tilde{r}_{21}} G'_{21}(\tilde{\eta})\\ \tilde{r}_{21} &= \tilde{m}_{21} + \tilde{r}_1 - \tilde{m}_1\end{aligned} \tag{122}$$

zusammen mit den Ansätzen für $\tilde{\eta}$, $\tilde{u}_1$ und $\tilde{T}_1$ aus Gl (49) führt dann wieder auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für F_{21} und G_{21}

$$\begin{aligned}&F'''_{21} + B^2(\tilde{n}+\tilde{m}_1)F_1F''_{21} - B^2(\tilde{m}_1+\tilde{m}_{21})F'_1F'_{21} +\\ &\quad + B^2(\tilde{n}+\tilde{m}_{21})F''_1F_{21} = B^3(\tilde{n}+\tilde{r}_{21})G_{21} - B^3\tilde{n}\,\tilde{\eta}G'_{21}\\ &\frac{1}{Pr}\,G'''_{21} + B^2(\tilde{n}+\tilde{m}_1)F_1G''_{21} - B^2\tilde{r}_{21}F'_1G'_{21} +\\ &\quad + B^2(\tilde{n}+\tilde{m}_{21})F_{21}G''_1 - B^2\tilde{r}_1F'_{21}G'_1 = 0\end{aligned} \tag{123}$$

Es gelten die Randbedingungen

$$\begin{aligned}&\tilde{\eta} = 0\text{:}\quad F_{21} = 0 \quad F'_{21} = 0 \quad G'_{21} = 0\\ &\tilde{\eta} \to \infty\text{:}\quad F'_{21} = 1 \quad G_{21} = 0 \quad G'_{21} = 0\end{aligned} \tag{124}$$

Aus den Lösungen dieser Gleichungen kann man die Ergebnisse für Wandschubspannung und Wärmeübergang bzw. Druck an der Wand ermitteln.

$$\begin{aligned}c_{f2}\mathrm{Re}\,K^{-\frac{2}{5}} &= \frac{2\,\tilde{b}}{B}\,x^{\tilde{m}_{21}+\frac{1}{5}\tilde{r}_1-\frac{2}{5}}\,F''_{21,W}\\ \mathrm{Nu}_2 &= \frac{\tilde{b}}{B}\,x^{\tilde{m}_{21}+\frac{4}{5}\tilde{r}_1-\frac{3}{5}}\,G''_{21,W}\\ p_{W2}\sqrt{\mathrm{Re}}\,K^{-\frac{3}{5}} &= B\,\tilde{b}\,x^{\tilde{m}_{21}+\frac{2}{5}\tilde{r}_1-\frac{1}{5}}\,G_{21,W}\end{aligned} \tag{125}$$

6.3 Lösung für mittlere K

Die obigen Näherungen für große und kleine K verlieren ihre Gültigkeit bei K = O(1). In diesem Fall ist Gl (30) die Beschreibung des Problems. Zur Lösung müssen $u_1(x;N;K;Pr)$; $v_1(x;N;K;Pr)$; $p_1(x;N;K;Pr)$; $T_1(x;N;K;Pr)$ und die Randbedingung $U_2(x;y=o;K;Pr)$ bekannt sein. Im Sonderfall des Fehlens einer geometrisch ausgezeichneten Länge verschwindet wiederum wie in Kap. 4.3 bei Ansätzen entsprechend Gl (54)

$$\begin{aligned} u_2 &= \hat{u}_2 \, K^{m_v} \\ v_2 &= \hat{v}_2 \, K^{m_v - m_x + m_y} \\ p_2 &= \hat{p}_2 \, K^{m_u + m_v} \\ T_2 &= \hat{T}_2 \, K^{m_T + m_v - m_u} \end{aligned} \tag{126}$$

der Parameter K aus den Gleichungen. m_x; m_y; m_u; m_v; m_p und m_T sind darin die Exponenten aus Gl (54). Das Gleichungssystem lautet dann

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial \hat{y}} = o \\ &\hat{u}_1 \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \hat{x}} + \hat{u}_2 \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}} + \hat{v}_1 \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \hat{y}} + \hat{v}_2 \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{y}} = - \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial^2 \hat{u}_2}{\partial \hat{y}^2} \\ &\frac{\partial \hat{p}_2}{\partial \hat{y}} = \hat{T}_2 \\ &\hat{u}_1 \frac{\partial \hat{T}_2}{\partial \hat{x}} + \hat{u}_2 \frac{\partial \hat{T}_1}{\partial \hat{x}} + \hat{v}_1 \frac{\partial \hat{T}_2}{\partial \hat{y}} + \hat{v}_2 \frac{\partial \hat{T}_1}{\partial \hat{y}} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \hat{T}_2}{\partial \hat{y}^2} \end{aligned} \tag{127}$$

mit den Randbedingungen

$$\hat{y} = o\text{:}\quad \hat{u}_2 = o \qquad \hat{v}_2 = o \qquad \hat{T}_2 = o$$
$$\hat{y} \to \infty\text{:}\quad \hat{u}_2 = \hat{U}_{2,R} \qquad \hat{p}_2 = \hat{P}_{2,R} \qquad \hat{T}_2 = o \tag{128}$$

Sind die Lösungen für kleine bzw. große K selbstähnlich, so sind bei den Randbedingungen

$$\bar{U}_{2,R} = b\, x^{m_{21}}$$
$$\tilde{U}_{2,R} = \tilde{b}\, x^{\tilde{m}_{21}} \tag{129}$$

die Lösungsansätze

$$\hat{u}_2 = b\, \hat{x}^{m_{21}}\, \hat{f}_{2\eta}(\hat{x},\hat{\eta})$$
$$\hat{T}_2 = b\, \hat{x}^{r_{21}}\, \hat{g}_{2\eta}(\hat{x},\hat{\eta}) \tag{130}$$

$$r_{21} = r_1 + m_{21} - m_1$$

(vergl. Gl (69)) bzw.

$$\hat{u}_2 = \tilde{b}\, \hat{x}^{m_{21}}\, \hat{F}_{2\zeta}(\hat{x},\zeta)$$
$$\hat{T}_2 = \tilde{b}\, \hat{x}^{r_{21}}\, \hat{G}_{2\zeta}(\hat{x},\zeta) \tag{131}$$

$$\tilde{r}_{21} = \tilde{m}_{21} + \tilde{r}_1 - \tilde{m}_1$$

(vergl. Gl (73)) möglich.

Die Ansätze Gl (130) führen auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
&B^2(m_1+m_{21})(\hat{f}_\eta\hat{f}_{2\eta} - \hat{f}_{\eta,\infty}\hat{f}_{2\eta,\infty}) + \\
&+ B^2\,\hat{x}[\hat{f}_\eta\hat{f}_{2\eta x} + \hat{f}_{2\eta}\hat{f}_{\eta x} - (\hat{f}_\eta\hat{f}_{2\eta x} + \hat{f}_{2\eta}\hat{f}_{\eta x})_\infty] - \\
&- B^2\,[(n+m_1)\hat{f} + \hat{x}\,\hat{f}_x]\,\hat{f}_{2\eta\eta} - \\
&- B^2\,[(n+m_{21})\hat{f}_2 + \hat{x}\,\hat{f}_{2x}]\,\hat{f}_{\eta\eta} - \hat{f}_{2\eta\eta\eta} + \\
&+ B^3\,\hat{x}^{r_1 - \frac{5}{2}m_1 + \frac{1}{2}}\,[(n+r_{21})\hat{g}_2 + \hat{x}\,\hat{g}_{2x} - n\hat{\eta}\,\hat{g}_{2\eta}] = o
\end{aligned} \tag{132}$$

$$\begin{aligned}
&B^2 r_{21}\hat{f}_\eta\hat{g}_{2\eta} + B^2 r_1\hat{f}_{2\eta}\hat{g}_\eta + B^2\hat{x}\,(\hat{f}_\eta\hat{g}_{2\eta x} + \hat{f}_{2\eta}\hat{g}_{\eta x}) - \\
&- B^2[(n+m_1)\hat{f} + \hat{x}\,\hat{f}_x]\hat{g}_{2\eta\eta} - \\
&- B^2[(n+m_{21})\hat{f}_2 + \hat{x}\,\hat{f}_{2x}]\hat{g}_{\eta\eta} - \frac{1}{Pr}\,\hat{g}_{2\eta\eta\eta} = o
\end{aligned}$$

mit den Randbedingungen

$$\hat{\eta} = o\text{:}\quad \hat{f}_2 = o \qquad \hat{f}_{2\eta} = o \qquad\qquad \hat{g}_{2\eta} = o$$

$$\hat{\eta} \to \infty\text{:}\qquad\quad \hat{f}_{2\eta} = \hat{f}_{2\eta,\infty}(\hat{x}) \qquad \hat{g}_2 = o \qquad \hat{g}_{2\eta} = o$$

Die Ansätze Gl (131) ergeben für $\hat{F}_2$ und $\hat{G}_2$ die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&B^2(\tilde{m}_1 + \tilde{m}_{21})[\hat{F}_\zeta \hat{F}_{2\zeta} - (\hat{F}_\zeta \hat{F}_{2\zeta})_\infty] + \\
&+ B^2\hat{x}\,[\hat{F}_\zeta \hat{F}_{2\zeta x} + \hat{F}_{2\zeta}\hat{F}_{\zeta x} - (\hat{F}_\zeta \hat{F}_{2\zeta x} + \hat{F}_{2\zeta}\hat{F}_{\zeta x})_\infty] - \\
&- B^2[(\tilde{n} + \tilde{m}_1)\hat{F} + \hat{x}\,\hat{F}_x]\hat{F}_{2\zeta\zeta} - \\
&- B^2[(\tilde{n} + \tilde{m}_{21})\hat{F}_2 + \hat{x}\,\hat{F}_{2x}]\hat{F}_{\zeta\zeta} - \hat{F}_{2\zeta\zeta\zeta} + \\
&+ B^3[(\tilde{n} + \tilde{r}_{21})\hat{G}_2 + \hat{x}\,\hat{G}_{2x} - \tilde{n}\,\hat{\zeta}\,\hat{G}_{2\zeta}] = o
\end{aligned} \tag{133}$$

$$\begin{aligned}
&B^2(\tilde{r}_{21}\hat{F}_\zeta \hat{G}_{2\zeta} + \tilde{r}_1 \hat{F}_{2\zeta}\hat{G}_\zeta) + B^2\hat{x}(\hat{F}_\zeta \hat{G}_{2\zeta x} + \hat{F}_{2\zeta}\hat{G}_{\zeta x}) - \\
&- B^2[(\tilde{n} + \tilde{m}_1)\hat{F} + \hat{x}\,\hat{F}_x]\hat{G}_{2\zeta\zeta} - \\
&- B^2[(\tilde{n} + \tilde{m}_{21})\hat{F}_2 + \hat{x}\,\hat{F}_{2x}]\hat{G}_{\zeta\zeta} - \frac{1}{Pr}\,\hat{G}_{2\zeta\zeta\zeta} = o
\end{aligned}$$

und die Randbedingungen

$$\hat{\zeta} = o\text{:}\quad \hat{F}_2 = o \qquad \hat{F}_{2\zeta} = o \qquad\qquad \hat{G}_{2\zeta} = o$$

$$\hat{\zeta} \to \infty\text{:}\qquad\quad \hat{F}_{2\zeta} = \hat{F}_{2\zeta,\infty}(\hat{x}) \qquad \hat{G}_2 = o \qquad \hat{G}_{2\zeta} = o$$

Die Indices x, η und ζ bezeichnen die Ableitungen nach $\hat{x}$, $\hat{\eta}$ bzw. $\hat{\zeta}$. Gl (132) degeneriert für negative m_x bei $\hat{x} = o$ in das Gleichungssystem für $K = o$ (Gl (113)), Gl (133) bei $\hat{x} \to o$ in das für $K \to \infty$ (Gl (123)). Für positive m_x tritt der umgekehrte Fall ein. Ein ähnliches Verhalten war schon in der 1. Ordnung beobachtet worden.

Alle 3 Systeme (Gl (126), Gl (132) und Gl (133)) sind wie die 3 ähnlich hergeleiteten Systeme in Kap. 4.3 zur Lösung des Auftriebsproblems gleichermaßen geeignet. Der Übergang von Gl (132) auf (133) bzw. umgekehrt ist bei $\hat{x} = 1$ am einfachsten.

Für die Wandschubspannung und den Wärmeübergang bzw. Druck an der Wand erhält man die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
c_{f2}\,Re &= 2\,K^{\frac{m_v - m_y}{2m_1 - 2}}\left(\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \hat{y}}\right)_W \\
&= \frac{2b}{B}\,K^{\frac{2m_1 - 2}{5m_1 - 2r_1 - 1}}\,\hat{x}^{m_{21} - n}\,\hat{f}_{2\eta\eta}(\hat{x},o) \qquad (134)\\
&= \frac{2\tilde{b}}{B}\,K^{\frac{2m_1 - 2}{5m_1 - 2r_1 - 1}}\,\hat{x}^{\tilde{m}_{21} - \tilde{n}}\,\hat{F}_{2\zeta\zeta}(\hat{x},o)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Nu_2 &= K^{m_T + m_v - m_u - m_y}\left(\frac{\partial \hat{T}_2}{\partial \hat{y}}\right)_W = K^{m_T - m_x}\left(\frac{\partial \hat{T}_2}{\partial \hat{y}}\right)_W \\
&= \frac{b}{B}\,K^{\frac{2r_1 - 2}{5m_1 - 2r_1 - 1}}\,\hat{x}^{r_{21} - n}\,\hat{\vartheta}_{2\eta\eta}(\hat{x},o) \qquad (135)\\
&= \frac{\tilde{b}}{B}\,K^{\frac{2r_1 - 2}{5m_1 - 2r_1 - 1}}\,\hat{x}^{\tilde{r}_{21} - \tilde{n}}\,\hat{G}_{2\zeta\zeta}(\hat{x},o)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{w2}\,Re &= K^{m_u + m_v}\,\hat{p}_{2,W} \\
&= K^{\frac{3m_1 - 1}{5m_1 - 2r_1 - 1}}\,b\,[-\hat{x}^{m_1 + m_{21}}(\hat{f}_\eta \hat{f}_{2\eta})_\infty \\
&\qquad + B\,\hat{x}^{r_{22} + n}\,\hat{\vartheta}_2(\hat{x},o)] \qquad (136)\\
&= K^{\frac{3m_1 - 1}{5m_1 - 2r_1 - 1}}\,\tilde{b}\,\hat{x}^{\tilde{m}_1 + \tilde{m}_{21}}\,[-(\hat{F}_\zeta \hat{F}_{2\zeta})_\infty + B\,\hat{G}_2(\hat{x},o)]
\end{aligned}
$$

7. Beispiele

7.1 Staupunkt

Die Staupunktströmung mit konstanter Wandtemperatur nimmt in der Behandlung der Auftriebseffekte einen Sonderstatus ein. In Tab. 2 sind die Ergebnisse für Pr = 0,7 dargestellt. Sowohl in 1. als auch in 2. Ordnung verschwindet der Auftriebseinfluß aus der Impulsgleichung in x-Richtung. Für Geschwindigkeit und Temperatur (Wandschubspannung und Wärmeübergang) gilt demnach die bekannte Lösung ohne Auftrieb. Nur der Druck erfährt durch Auftriebseffekte eine Änderung. Er nimmt an Oberseiten heißer Wände zur Wand hin ab. Die Effekte 2. Ordnung hängen noch von der Geometrie des Körpers ab, dessen Staupunkt man betrachtet. Sie geht in die Konstante A_2 ein.

$$c_f \sqrt{Re} = 2{,}46518 \; x \; \left(1 + \frac{1{,}5}{\sqrt{Re}} A_2 \right)$$

$$\frac{Nu}{\sqrt{Re}} = -0{,}49587 \; \left(1 + \frac{0{,}5}{\sqrt{Re}} A_2 \right)$$

$$p_W = p_{1,R} - 1{,}1864 \; K \; x^{0,5} + \\ + \frac{1}{\sqrt{Re}} \left(p_{2,R} + 0{,}5932 \; K \; x^{0,5} A_2 \right)$$

Tabelle 2: Ergebnisse der Staupunktströmung (Pr = 0,7)

7.2 Längsangeströmte Platte

Als 2. Beispiel wurde eine längsangeströmte Platte bei konstanter Wandtemperatur untersucht. Ergebnisse für Pr = 0,7 der Entwicklungen für kleine und große K sind in Tab. 3, die für mittlere K in Tab. 4 zu finden. Die letz-

	K → 0	K → ∞
$c_{f1}\sqrt{Re}$	$0{,}664\,x^{-1/2} + K\ 3{,}4458$	$K^{3/5}\ 1{,}9777\,x^{-1/5} + K^{1/5}\ 0{,}08854\,x^{-2/5}$
$\frac{Nu_1}{\sqrt{Re}}$	$-0{,}29267\,x^{-1/2} - K\ 0{,}3567$	$-K^{1/5}\ 0{,}35466\,x^{-2/5} - K^{-1/5}\ 0{,}036911\,x^{-3/5}$
P_{W1}	$0{,}5 - K\ 1{,}9587\,x^{1/2}$	$K^{4/5}\ 1{,}7500\,x^{2/5} - K^{2/5}\ 0{,}2842\,x^{1/5}$
$c_{f2}\,Re$	0	$K^{2/5}\ 0{,}5395\,x^{-4/5}$

Tabelle 3: Näherungslösungen für kleine und große K bei der Platte (Pr = 0,7)

K_x	$\frac{1}{2} c_f \sqrt{Re}\, x^{1/2}$	$\frac{Nu}{\sqrt{Re}} x^{1/2}$	$\frac{P_W - P_{1,R}}{K_x}$
0.0000	0.3321	-0.2927	-1.9585
0.0100	0.3339	-0.2928	-1.9532
0.0200	0.3402	-0.2930	-1.9372
0.0400	0.3647	-0.2939	-1.9531
0.0600	0.4013	-0.2953	-1.9462
0.0800	0.4420	-0.2974	-1.9365
0.1000	0.4785	-0.3001	-1.9242
0.2000	0.5820	-0.3206	-1.8267
0.4000	0.7592	-0.3654	-1.6025
0.6000	0.9080	-0.3801	-1.5513
0.8000	1.0398	-0.3926	-1.5119
1.0000	1.1601	-0.4051	-1.4684
2.0000	1.6609	-0.4491	-1.3347
4.0000	2.4276	-0.5026	-1.2006
6.0000	3.0510	-0.5386	-1.1241
8.0000	3.5953	-0.5664	-1.0713
10.0000	4.0879	-0.5894	-1.0313
20.0000	6.1166	-0.6686	-0.9131
40.0000	9.1915	-0.7610	-0.8051
60.0000	11.6843	-0.8219	-0.7468
80.0000	13.8570	-0.8683	-0.7076
100.0000	15.8149	-0.9063	-0.6784

Tabelle 4: Ergebnisse der Platte (Pr = 0,7)

tere Lösung ist daneben zusätzlich in Bild 8 graphisch aufgetragen. Lösungen 2. Ordnung sind nur für kleine und große K angegeben.

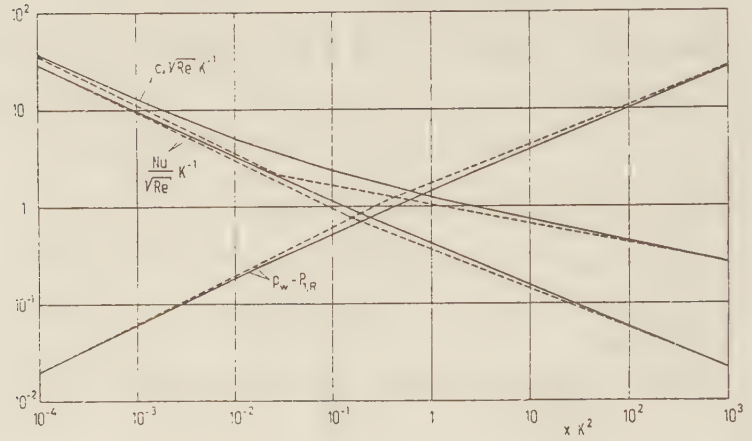

Bild 8: Wandschubspannung, Wärmeübergang und Wanddruck bei der Platte (Pr = 0,7; Asymptoten K→ o u. K→ ∞ gestrichelt)

In der 1. Ordnung ist der Einfluß des Auftriebs nahe der Vorderkante klein und vergrößert sich mit dem Abstand von ihr. Der Effekt wird durch Vergrößerung der Auftriebskräfte (Erhöhung von K) verstärkt. Die Lösungen zeigen, daß Auftrieb an Oberseiten von horizontalen Wänden Schubspannung und Wärmeübergang erhöht und den Druck vermindert.

Den Einfluß der Prandtl-Zahl auf diese Effekte deuten die Bilder 9 und 10 an. Darin ist jeweils das 2. Glied der Entwicklung für kleine K der Lösung 1. Ordnung aufgetragen. Der Auftriebseffekt nimmt mit zunehmender Prandtl-Zahl ab, der Wärmeübergang jedoch erst nach Errei-

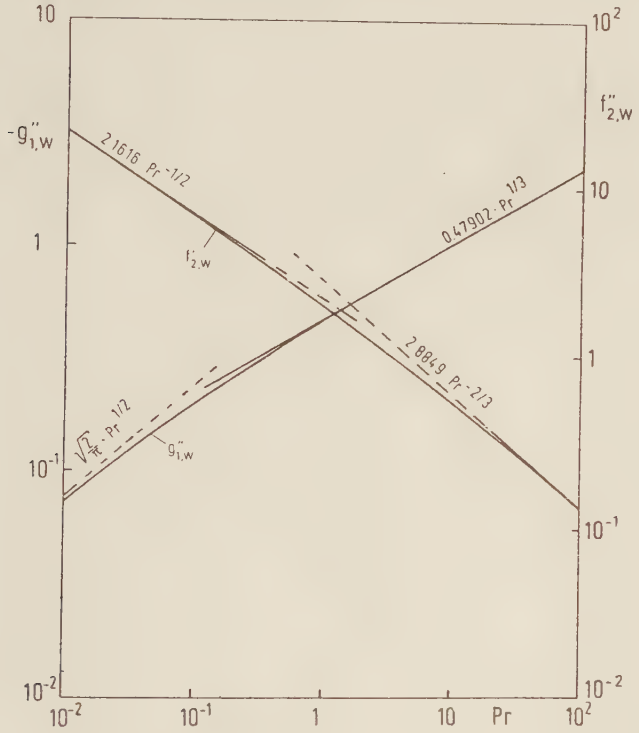

Bild 9: Variation von Wärmeübergang 1. Glied und Wandschubspannung 2. Glied einer Entwicklung für kleine K bei der Platte mit Pr

chen eines Maximums in der Nähe von Pr = 0,1. Die Asymptoten für Pr → o und Pr → ∞ sind der Arbeit von Leal (1973) entnommen.

In der 2. Ordnung ergeben sich keine Effekte für kleine K. Für große K ist wie bei der Staupunktströmung nur ein

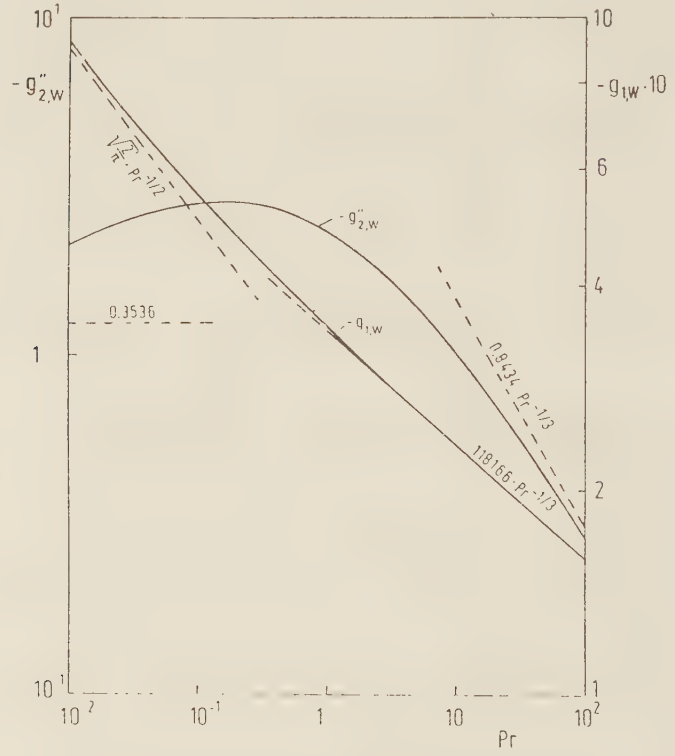

Bild 10: Variation von Wärmeübergang 2. Glied und Druckänderung in der Grenzschicht einer Entwicklung für kleine K bei der Platte mit Pr

Einfluß auf die Geschwindigkeit (Wandschubspannung) gegeben. Mittlere Auftriebsparameter wurden in dieser Arbeit für die 2. Ordnung nicht untersucht. Aus den asymptotischen Lösungen ist eine Zunahme der Wandschubspannung mit einem Maximum bei mittleren Abständen von der Vorderkante (mittlere Auftriebskräfte) zu erwarten.

Ein Vergleich mit Ergebnissen anderer Autoren (siehe Tab. 5) bestätigt soweit vorhanden die vorliegende Lösung 1.Ordnung. Die Übereinstimmung ist gut. Leider fehlten bisher in der Literatur Ergebnisse 2. Ordnung, um auch diese Werte und die gemachten Erwartungen zu bestätigen.

	Außen-geschwindigkeit	Wand-temperatur	Pr	Auftriebs-bereich
Chen (1977)	konst	konst	0,7	$K = O(1)$
Gersten (1977)	konst	konst	0,7	$K \to o$
Gersten (1978)	$U \sim x^m$	$T \sim x^r$	0,7	$K \to o$
Gill (1962)	0	konst	0,1;0,72;5	$K \to \infty$
Gill (1965)	0	konst	0,72;1;10	$K \to \infty$
Hieber (1973)	konst	konst	0;0,72;∞	$K = O(1)$
Leal (1973)	konst	konst	$0 < Pr < \infty$	$K \to \infty$
Mori (1961)	konst	konst	0,72	$K \to o$
Pera (1973)	0	T_w, q_w konst	0,1 - 10	$K \to \infty$
Rotem (1969a)	0	konst	$0 < Pr < \infty$	$K \to \infty$
Rotem (1969b)	0	konst	$0 < Pr < \infty$	$K \to \infty$
Schneider (1979)	konst	$T \sim x^{-1/2}$	0,5; 1; 2	$K = O(1)$
Sparrow (1962)	konst	konst	0,01;0,7;10	$K \to o$
Stewartson (1958)	0	konst	0,72	$K \to \infty$

Tabelle 5: Zusammenstellung der Arbeiten über Auftriebseffekte in horizontalen Grenzschichten

7.3 Geheizter Wandstrahl

Auch für den geheizten Wandstrahl wurden die vorliegenden Gleichungen für Pr = 0,7 gelöst. Die Lösungen sind in Tab. 6 und 7 bzw. Bild 11 zusammengestellt. In der

	K → 0	K → ∞
$c_{f1}\sqrt{Re}$	$2/9 \cdot x^{-5/4} + K \cdot 16{,}303 \cdot x^{1/2}$	$K^{3/5} \cdot 1{,}9977 \cdot x^{-1/5}$
$\frac{Nu_1}{\sqrt{Re}}$	$-0{,}14125 \cdot x^{-1/2} - K \cdot 3{,}2739 \cdot x$	$-K^{1/5} \cdot 0{,}35466 \cdot x^{-2/5}$
P_{W1}	$-K \cdot 4{,}4128 \cdot x^{3/4}$	$-K^{4/5} \cdot 1{,}7500 \cdot x^{2/5}$
$c_{f2}\,Re$	$3{,}6213 \cdot x^{-3/2} - K \cdot 65{,}156 \cdot x^{1/4}$	$-K^{2/5} \cdot 1{,}2022 \cdot x^{-4/5}$

Tabelle 6: Näherungslösungen für kleine und große K beim geheizten Wandstrahl (Pr = 0,7)

K_x	$c_{f1}\sqrt{Re}\,x^{5/4}$	$2\frac{Nu_1}{\sqrt{Re}}x^{3/4}$	$\frac{P_{W1}\,x}{2\,K_x}$	$c_{f2}\,Re\,x^{3/2}$	$2\,Nu_2\,x$	$\frac{P_{W2}\,x^{5/4}}{2\sqrt{Re}\,K_x}$
0.0000	0.2222	-0.2823	-2.2067	3.6214	0.0000	0.0000
0.0100	0.3328	-0.3160	-2.0005	3.7371	1.0005	-0.5711
0.0200	0.3901	-0.3322	-1.9038	3.7972	1.0421	-0.7567
0.0400	0.4540	-0.3561	-1.7677	3.8911	1.0767	-0.9424
0.0600	0.5024	-0.3746	-1.6673	3.9654	1.0966	-1.0993
0.0800	0.5416	-0.3909	-1.5871	4.0258	2.0482	-1.4723
0.1000	0.5745	-0.4050	-1.5205	4.0759	2.1139	-1.6195
0.2000	0.9536	-0.4601	-1.3017	4.3247	2.2808	-2.3066
0.4000	1.3414	-0.5347	-1.1024	4.5839	2.3594	-2.8494
0.6000	1.6502	-0.5879	-1.0116	4.7099	2.4853	-2.5407
0.8000	1.9165	-0.6297	-0.9584	4.7886	2.4691	-2.3188
1.0000	2.1554	-0.6641	-0.9210	4.7907	2.4721	-2.1532
2.0000	3.1279	-0.7796	-0.8084	4.6823	2.3706	-1.6771
4.0000	4.5694	-0.9027	-0.7050	4.2710	2.2289	-1.2688
6.0000	5.7687	-0.9774	-0.6434	3.9005	2.1084	-1.0453
8.0000	6.7765	-1.0328	-0.6060	3.5824	2.0535	-0.9367
10.0000	7.7047	-1.0778	-0.5785	3.3109	1.9856	-0.8458
20.0000	11.5430	-1.2342	-0.5010	2.2342	1.7920	-0.6091
40.0000	17.3393	-1.4186	-0.4340	1.6203	1.5904	-0.4222
60.0000	21.8194	-1.5433	-0.3991	1.4304	1.4804	-0.3519
80.0000	25.6772	-1.6511	-0.3760	1.3578	1.4151	-0.3075
100.0000	29.0952	-1.7045	-0.3594	1.3509	1.3890	-0.2703

Tabelle 7: Ergebnisse des geheizten Wandstrahls (Pr=0,7)

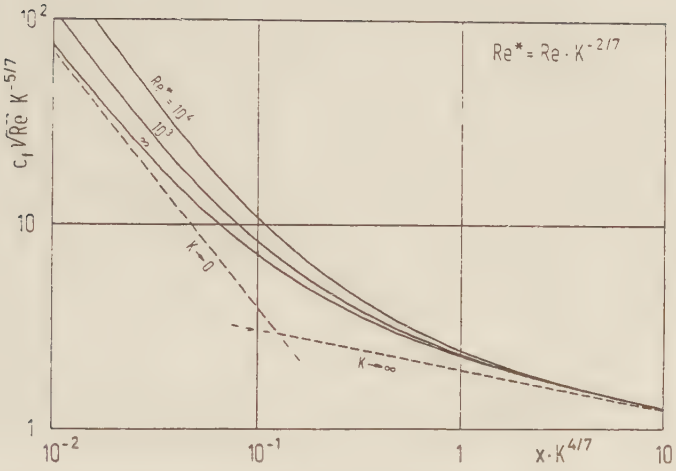

Bild 11a: Wandschubspannung des geheizten Wandstrahls
(Pr = 0,7; Asymptoten K→ o u. K→ ∞ gestrichelt)

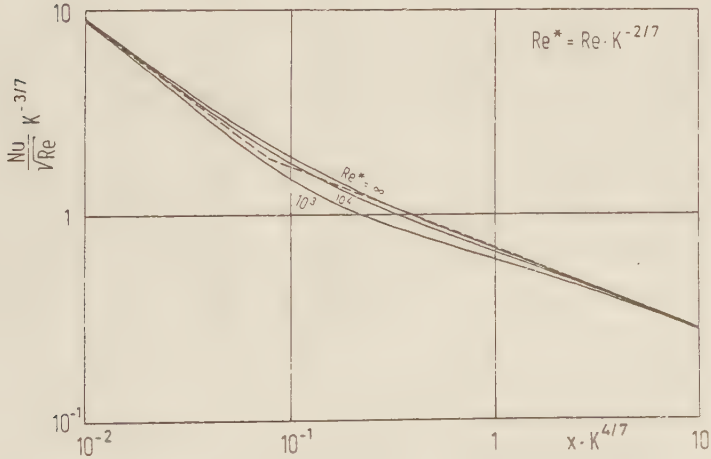

Bild 11b: Wärmeübergang des geheizten Wandstrahls
(Pr = 0,7; Asymptoten K→ o u. K→ ∞ gestrichelt)

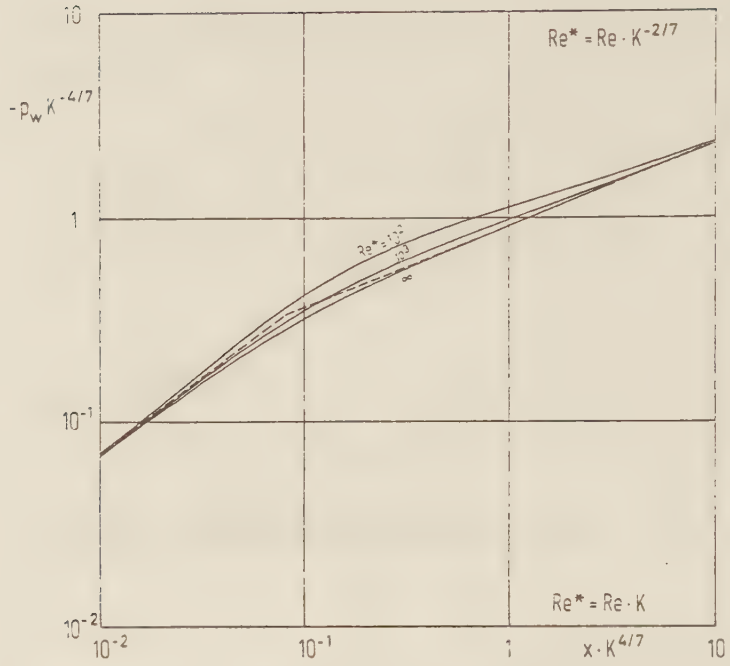

Bild 11c: Wanddruck des geheizten Wandstrahls
(Pr = 0,7; Asymptoten K→ o u. K→ ∞ gestrichelt)

1. Ordnung können ähnliche Effekte wie bei der längsangeströmten Platte beobachtet werden. Die unterschiedliche Zunahme des Effekts mit der Lauflänge ist auf die Unterschiede beim lokalen Auftriebsparameter K_x zurückzuführen. Die ersten Glieder beider Lösungen 1. Ordnung sind im Grenzfall K → ∞ jedoch identisch.

Effekte 2. Ordnung verstärken den Auftriebseffekt bei der Wandschubspannung und beim Wanddruck. Dagegen verschwinden diese Effekte beim Wärmeübergang für kleine und große K (siehe auch Plattenlösung) und vermindern ihn im mittleren Bereich des Auftriebsparameters (mittlere $\hat{x}$).

	$K \to 0$	$K \to \infty$
$c_{f1}\sqrt{Re}$	$2/9\ x^{-5/4} + K\ 9{,}4838\ x^{-0{,}05371}$	$K^{3/5}\ 0{,}47074\ x^{-0{,}67446}$
$\frac{Nu_1}{\sqrt{Re}}$	$1/6\ x^{-1{,}30357} + K\ 1{,}2544\ x^{-0{,}10714}$	$K^{1/5}\ 0{,}1453\ x^{-1{,}34892}$
p_{W1}	$- K\ 3{,}9518\ x^{0{,}19643}$	$- K^{4/5}\ 0{,}94728\ x^{-0{,}23262}$
$c_{f2}\,Re$	$3{,}6213\ x^{-3/2} - K\ 117{,}271\ x^{-0{,}30371}$	$- K^{-2/5}\ 12{,}9586\ x^{-1{,}11631}$
Nu_2	$1{,}2071\ x^{-1{,}55357}$	$0{,}41966\ x^{-1{,}79077}$
$p_{W2}\sqrt{Re}$	$K\ 10{,}9805\ x^{-0{,}05357}$	$- K^{3/5}\ 5{,}23484\ x^{-0{,}58142}$

Tabelle 8: Näherungslösungen für kleine und große K beim heißen Wandstrahl (Pr = 0,7)

K_x	$c_{f1}\sqrt{Re}\,x^{5/4}$	$2\frac{Nu_1}{\sqrt{Re}}x^{1{,}3036}$	$\frac{p_{W1}\,x}{2\,K_x}$	$c_{f2}\,Re\,x^{3/2}$	$2\,Nu_2\,x^{1{,}5536}$	$\frac{p_{W2}\,x^{5/4}}{2\sqrt{Re}\,K_x}$
0.0000	0.2218	0.3336	-2.0014	3.6210	2.4141	5.3234
0.0100	0.2733	0.3408	-1.6229	3.6262	2.4074	0.2362
0.0200	0.3068	0.3474	-1.4063	3.6302	2.4055	-1.1468
0.0400	0.3528	0.3559	-1.1807	3.6374	2.4108	-2.2340
0.0600	0.3835	0.3597	-1.0731	3.6441	2.4241	-2.6[illegible]
0.0800	0.4054	0.3605	-1.0045	3.6503	2.4425	-2.9600
0.1000	0.4220	0.3592	-0.9511	3.6564	2.4643	-3.1013
0.2000	0.4711	0.3376	-0.7829	3.6843	2.5879	-3.2783
0.4000	0.5491	0.3083	-0.6336	3.7342	2.7908	-3.2472
0.6000	0.6176	0.3039	-0.5565	3.7800	2.9186	-3.3157
0.8000	0.6720	0.3055	-0.5063	3.8239	3.0022	-3.2238
1.0000	0.7181	0.3071	-0.4700	3.8668	3.0615	-3.1321
2.0000	0.9073	0.3045	-0.3712	4.0840	3.3310	-2.8404
4.0000	1.1705	0.2964	-0.2914	4.5553	3.5845	-2.5764
6.0000	1.3641	0.2909	-0.2522	5.0582	3.7848	-2.4234
8.0000	1.5256	0.2867	-0.2275	5.6118	4.0355	-2.3208
10.0000	1.6672	0.2844	-0.2101			
20.0000	2.2127	0.2752	-0.1638			
40.0000	2.9649	0.2659	-0.1270		keine Ergebnisse	
60.0000	3.5092	0.2587	-0.1093			
80.0000	4.0053	0.2560	-0.0974			
100.0000	4.4209	0.2534	-0.0910			

Tabelle 9: Ergebnisse des heißen Wandstrahls (Pr = 0,7)

7.4 Heißer Wandstrahl

Als letztes Beispiel dieser Arbeit wird der heiße Wandstrahl behandelt. Er zeigt bekanntlich in der Praxis Ablösung. Die durchgeführten Rechnungen - sowohl die auf der Basis von Entwicklungen für kleine und große K als auch die für mittlere Auftriebsparameter - können dieses Verhalten jedoch nicht erklären. Ihre Lösungen für Pr = 0,7 sind in Tab. 8 und 9 angegeben. Die Lösungen für mittlere K-Werte sind zusätzlich in Bild 12 aufgetragen.

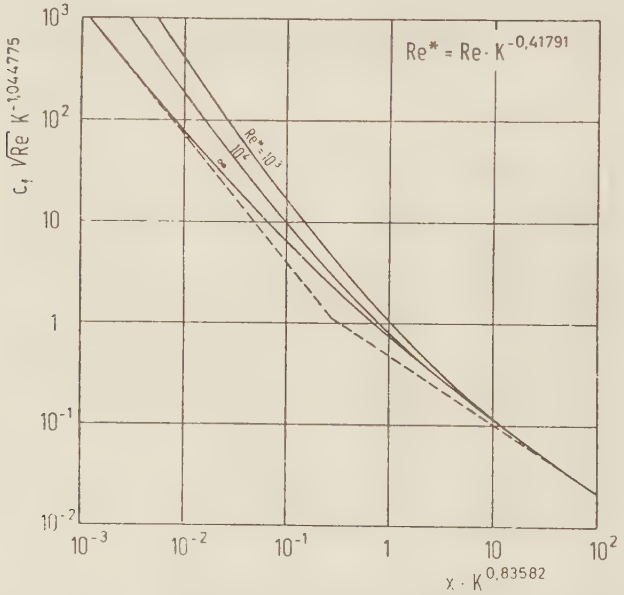

Bild 12a: Wandschubspannung des heißen Wandstrahls
(Pr = 0,7; Asymptoten K→ o u. K→ ∞ gestrichelt)

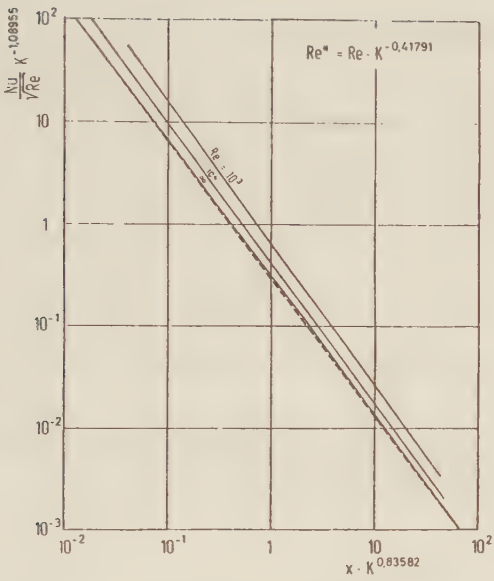

Bild 12b: Wärmeübergang des heißen Wandstrahls
(Pr = 0,7; Asymptoten K →o u. K→∞ gestrichelt)

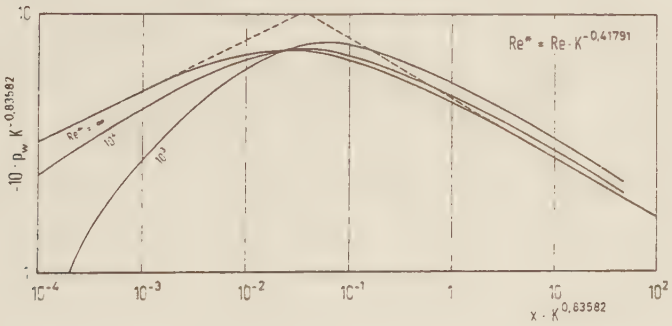

Bild 12c: Wanddruck des heißen Wandstrahls
(Pr = 0,7; Asymptoten K →o u. K → ∞ gestrichelt)

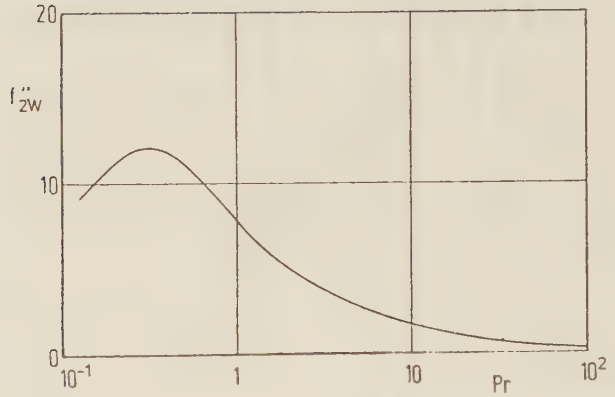

Bild 13: Variation des 2. Gliedes der Wandschubspannung 1.Ordnung einer Entwicklung für kleine K beim heißen Wandstrahl mit Pr (Vertikalasymptote bei Pr = 1/11)

Aber auch bei anderen Prandtl-Zahlen ist Ablösung nicht zu erwarten. Die Variation der Wandschubspannung 1. Ordnung im 2. Glied der Entwicklung für kleine K, die in Bild 13 zu sehen ist, deutet jedenfalls nichts Ähnliches an. Eine Besonderheit hat jedoch diese Lösung. Rechnungen für $Pr < 1/11$ zeigen ein eigenartiges Lösungsverhalten. Für $Pr = 1/11$ erhält man sogar eine Vertikalasymptote. Im vollständigen System erkennt man sofort die Ursache. Die Lösungen der homogenen Gleichungen beim heißen Wandstrahl haben von der Prandtl-Zahl abhängige Eigenwerte. Die Temperaturabhängigkeit von der Lauflänge ist eine Funktion der Prandtl-Zahl (siehe Riley (1958) und (1962)).

Dasselbe gilt damit auch für das 2. Glied der Geschwindigkeit einer Näherung für kleine K. Bei $1/m_x = 0$, was in dieser Näherung Pr = 1/11 entspricht, gilt die Lösung der freien Konvektionsströmung (siehe Bild 14). Für die Exponenten der Geschwindigkeits- bzw. Temperaturverteilung existieren aufgrund anderer Gleichungen (freie Konvektion) auch andere Beziehungen (Eigenlösungen). Aus Bild 14 ist auch zu erkennen, daß die Lösung des Wandstrahls - ob geheizter oder heißer - nur für bestimmte Temperaturverteilungen existiert.

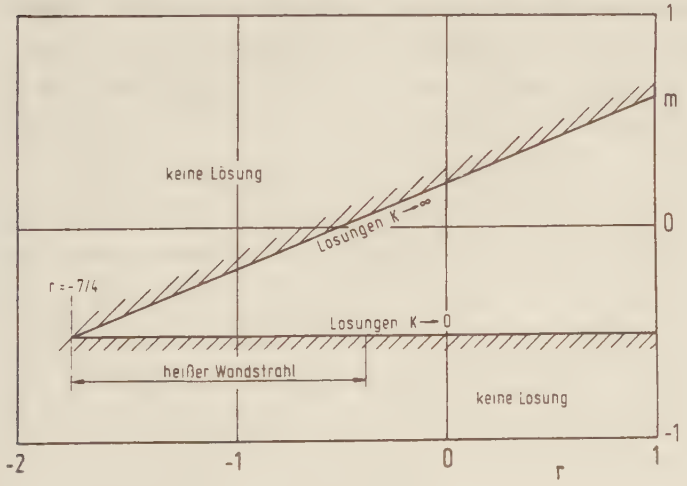

Bild 14: Lösungsbereich für Wandstrahlen ($u \sim x^m$, $T \sim x^r$)

Ansonsten weicht der heiße Wandstrahl in der 1. Ordnung weder bei der Wandschubspannung noch beim Druck für Pr = 0,7 in der Tendenz von der Platte oder vom geheizten Wandstrahl ab. Eine Ausnahme bildet jedoch der Wärmeübergang. Hier ist eine Abnahme gegenüber der Lösung ohne Auftrieb zu beobachten.

In der 2. Ordnung gibt es ebenfalls Unterschiede zu den Lösungen beim geheizten Wandstrahl. Gegenüber einer Abnahme des Wärmeübergangs dort findet man beim heißen Wandstrahl eine Vergrößerung des Wärmeübergangs durch Effekte höherer Ordnung. Effekte 2. Ordnung verkleinern dagegen zunächst die Druckabnahme in der Grenzschicht; für große x (K) wird sie jedoch wie beim geheizten Wandstrahl erhöht.

8. Zusammenfassung

Es wird die Strömung in ebenen, laminaren Grenzschichten an horizontalen Wänden untersucht, wenn Dichteänderungen infolge von Temperaturunterschieden Auftrieb hervorrufen. Dazu werden die Erhaltungsgleichungen für Strömungen mit Auftrieb an horizontalen Wänden für kleine Dichteänderungen hergeleitet. Für Strömungen bei großen Reynolds-Zahlen wird eine angepaßte asymptotische Entwicklung angegeben, die die Auftriebseffekte durch eine entsprechende Wahl des Grenzprozesses im Gegensatz zur klassischen Grenzschichttheorie Prandtls schon in der 1. Ordnung berücksichtigt. Zur Lösung der Grenzschichtgleichungen 1. und 2. Ordnung werden Reihenansätze für kleine und große Auftriebseffekte sowie eine spezielle Transformation für mittlere Auftriebseffekte vorgeschlagen. Schubspannung, Wärmeübergang und Druck an der Wand werden berechnet. Die Entwicklungen für kleine und große Werte des Auftriebsparameters werden anhand von Beispielen auf Gültigkeitsgrenzen untersucht und Möglichkeiten zur Erweiterung der Gültigkeitsbereiche angegeben. Sie können mittlere Effekte nur bedingt beschreiben. Zur Behandlung der Grenzschichteffekte 2. Ordnung wird außerdem die Außenströmung 2. Ordnung berechnet. Numerische Ergebnisse für Schubspannung, Wärmeübergang und Druck an der Wand unter Einfluß des Auftriebs werden für 4 Beispiele

- Staupunktströmung, längsangeströmte Platte, geheizter und heißer Wandstrahl - angegeben. In allen Beispielen vergrößert Auftrieb die Wandschubspannung und mit Ausnahme des heißen Wandstrahls auch den Wärmeübergang. Beim heißen Wandstrahl dagegen nimmt der Wärmeübergang ab. Nur im Sonderfall der Staupunktströmung sind Wandschubspannung und Wärmeübergang unverändert. Außerdem entsteht in der Grenzschicht ein Druckgradient senkrecht zur Wand mit niedrigerem Druck an der Wand im Gegensatz zum konstanten Druck bei Prandtl.

Literatur

Chen;T.S & Sparrow;E.M & Mucoglu;A. 1977 Mixed Convection in Boundary Layer Flow on a Horizontal Plate
J.Heat Tranfer 99; 66-71

Domb;C. & Sykes;M.F. 1957 On the susceptibility above the Curie point
Proc. Roy. Soc. Ser. A 240; 214-228

van Dyke;M. 1974 Perturbation Methods in Fluid Mechanics
Parabolic Press

Evans;H.L. 1968 Laminar Boundary Layer Theory
Addison-Wesley Publ.

Gersten;K. & d'Avila;J.S. 1977 Grenzschichteffekte höherer Ordnung bei kombinierter freier und erzwungener Konvektion
DLR-FB 77-16; 85-90

Gersten;K. & Schilawa;S. 1978 Buoyancy Effekts on Forced-convection Heat Transfer in Horizontal Boundary Layers
Proc. 6.Int.Heat Transfer Conf. Bd.1; 73-78

Gill;W.N & del Casal;E. 1962 A Theoretical Investigation of Natural Convection Effects in Forced Horizontal Flows
A.I.Chem.Eng. 8 ; 513-518

Gill;W.N & Zeh;D.W. & del Casal;E. 1965
Free Convection on a Horizontal Plate
ZAMP 16; 539-541

Hieber;C.A. 1973 Mixed Convection above a heated horizontal surface
Int.J.Heat Mass Transfer 16; 769-785

Kaplun;S. 1954 The Role of coordinate systems in boundary layer theory
ZAMP 5; 111-135

Lagerstrom;P.A. & Cole;J.D. 1955 Examples illustrating expansion procedures for the Navier-Stokes equations
J.Rational Mechanics and Analysis 4; 817-882

Leal;L.G. 1973 Combined Forced and Free Convection Heat Transfer from a Horizontal Flat Plate
ZAMP 24; 20-42

Mori,Y. 1961 Buoyancy Effects in Forced Laminar Convection Flow over Horizontal Flat Plate
J.Heat Transfer 16, 479-482

Pera,L. & Gebhart,B. 1973 Natural Convection Boundary Layer Flow over Horizontal and slightly Inclined Surfaces
Int.J.Heat Mass Tranfer 16, 1131-1146

Pera,L. & Gebhart,B. 1973 On the Stability of Natural Convection Boundary Layer Flow over Horizontal and slightly Inclined Surfaces
Int.J.Heat Mass Tranfer 16, 1147-1163

Redekopp,L.G & Charwat.,A.F. 1972 Role of Buoyancy and the Boussinesq Approximation in Horizontal Boundary Layers
J.Hydraulics 6, 34-39

Riley,N. 1958 Effects of Compressibility on a wall jet
J. Fluid Mech. 4, 615-628

Riley,N. 1962 Radial Jets with Swirl
Quart.J.Mech.App.Math. 15, 435-469

Rotem,Z. & Claasen,L. 1969 Free Convection Boundary Layer Flow over Horizontal Plates and Discs
Can.J.Chem.Eng. 47, 461-468

Rotem,Z. & Claasen,L. 1969 Natural convection above unconfined horizontal surfaces
J.Fluid Mech. 38, 173-192

Schlichting,H. 1980 Boundary Layer Theory
McGraw-Hill New York

Schneider,W. 1979 A Similarity Solution for Combined Forced and Free Convection Flow over a Horizontal Plate
Int.J.Heat Mass Transfer 22, 1401-1406

Shanks,D. 1955 Non-linear transformations of divergent and slowly convergent sequences
J.Math.Phys. 34

Sparrow,E.M & Minkowycz,W.J. 1962 Buoyancy Effects on Horizontal Boundary-Layer Flow and Heat Transfer
Int.J.Heat Mass Transfer 5, 505-511

Stewartson,K. 1958 On the Free Convection from a Horizontal Plate
ZAMP 9a, 276-282

Traugott,S.C. 1975 Buoyant convection from horizonial
surfaces at constant pressure
J.Fluid Mech. 68 ,609

Verzeichnis der Bilder und Tabellen

Bild 1: Beispiele

Bild 2: Abhängigkeit der Anfangslösung von den Exponenten der Randbedingungen

Bild 3: Reihensummen der Näherung für kleine K und exakte Lösung beim geheizten Wandstrahl (Pr = 0,7)

Bild 4: Domb-Sykes-Auftragung der Lösungsreihe des geheizten Wandstrahls (Pr = 0,7)

Bild 5: Reihensummen der Näherung für große K mit exakter Lösung für längsangeströmte Platte (Pr = 0,72)

Bild 6: Verschiedene Verbesserungen der Näherungslösung für kleine K beim geheizten Wandstrahl (Pr = 0,7)

Bild 7: Lösungsverbesserungen mit den Näherungslösungen für kleine und große K beim geheizten Wandstrahl (Pr = 0,7)

Bild 8: Wandschubspannung, Wärmeübergang und Wanddruck bei der Platte (Pr = 0,7; Asymptoten $K \to 0$ u. $K \to \infty$ gestrichelt)

Bild 9: Variation von Wärmeübergang 1. Glied und Wandschubspannung 2. Glied einer Entwicklung für kleine K bei der Platte mit Pr

Bild 10: Variation von Wärmeübergang 2. Glied und Druckänderung in der Grenzschicht einer Entwicklung für kleine K bei der Platte mit Pr

Bild 11a: Wandschubspannung des geheizten Wandstrahls (Pr = 0,7; Asymptoten $K \to 0$ u. $K \to \infty$ gestrichelt)

Bild 11b: Wärmeübergang des geheizten Wandstrahls (Pr = 0,7; Asymptoten $K \to 0$ u. $K \to \infty$ gestrichelt)

Bild 11c: Wanddruck des geheizten Wandstrahls (Pr = 0,7; Asymptoten $K \to 0$ u. $K \to \infty$ gestrichelt)

Bild 12a: Wandschubspannung des heißen Wandstrahls
(Pr = 0,7; Asymptoten K→ o u. K→ ∞ gestrichelt)

Bild 12b: Wärmeübergang des heißen Wandstrahls
(Pr = 0,7; Asymptoten K→ o u. K→ ∞ gestrichelt)

Bild 12c: Wanddruck des heißen Wandstrahls
(Pr = 0,7; Asymptoten K→ o u. K→ ∞ gestrichelt)

Bild 13: Variation des 2. Gliedes der Wandschubspannung 1.Ordnung einer Entwicklung für kleine K beim heißen Wandstrahl mit Pr
(Vertikalasymptote bei Pr = 1/11)

Bild 14: Lösungsbereich für Wandstrahlen ($u \simeq x^m$, $T \simeq x^r$)

Bild 15: Mögliche Näherungslösungen für die Strömung mit Auftrieb an der Platte (T_W = konst)

Tabelle 1: Spezielle Transformation für die 4 Beispiele

Tabelle 2: Ergebnisse der Staupunktströmung (Pr = 0,7)

Tabelle 3: Näherungslösungen für kleine und große K bei der Platte (Pr = 0,7)

Tabelle 4: Ergebnisse der Platte (Pr = 0,7)

Tabelle 5: Zusammenstellung der Arbeiten über Auftriebseffekte in horizontalen Grenzschichten

Tabelle 6: Näherungslösungen für kleine und große K beim geheizten Wandstrahl (Pr = 0,7)

Tabelle 7: Ergebnisse des geheizten Wandstrahls (Pr=0,7)

Tabelle 8: Näherungslösungen für kleine und große K beim heißen Wandstrahl (Pr = 0,7)

Tabelle 9: Ergebnisse des heißen Wandstrahls (Pr = 0,7)

Anhang

A1. Überblick über mögliche Näherungen bei großen Reynolds-Zahlen

A1.1 Entwicklung nach Prandtl

In Kap. 3 war ein Grenzprozeß durchgeführt worden, der durch die Beibehaltung der Auftriebsglieder in den Gleichungen bestimmt war. Am Beispiel der längsangeströmten Platte konstanter Wandtemperatur soll erläutert werden, welche verschiedenen Näherungen der Gln (7) für Strömungen bei großen Reynolds-Zahlen außerdem noch möglich sind. Ebenfalls sollen die Grenzen der verschiedenen Konzepte aufgezeigt werden. Die Notwendigkeit der Berücksichtigung der Auftriebsglieder wird dabei bestätigt. Dazu werden Bezugsgrößen bekannter Teillösungen (Näherungen) für das vollständige Problem gewählt. Aus der Größenordnung der Glieder in den so gewonnenen dimensionslosen Gleichungen lassen sich auch benachbarte Teillösungen (Näherungen) erkennen. Dadurch erhält man einen Überblick über die verschiedenen möglichen Näherungen.
Das gewählte Beispiel hat keine aus der Geometrie ausgezeichnete Länge. Eine solche ergibt sich aber für dieses Problem aus den Randbedingungen und den Konstanten

$$L_P = \frac{U_o^2}{g\,\beta_o\,(T_W - T_o)} \qquad (A1)$$

Als Bezugsgeschwindigkeit steht die Randgeschwindigkeit zur Verfügung

$$U_{BP} = U_o \tag{A2}$$

Ähnliches gilt für die Temperaturdifferenz. Dort bietet sich als Bezugsgröße die Temperaturdifferenz an der Wand

$$T_{BP} = T_W - T_o \tag{A3}$$

an; um die Temperaturdifferenz dimensionslos zu machen. Für die Druckdifferenz p** nimmt man den doppelten Staudruck der Bezugsgeschwindigkeit. Man erhält damit folgendes dimensionslose Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_P}{\partial x_P} + \frac{\partial v_P}{\partial y_P} = o \\
u_P\frac{\partial u_P}{\partial x_P} + v_P\frac{\partial u_P}{\partial y_P} &= -\frac{\partial p_P}{\partial x_P} + \frac{1}{Re_P}\left(\frac{\partial^2 u_P}{\partial x_P^2} + \frac{\partial^2 u_P}{\partial y_P^2}\right) \\
u_P\frac{\partial v_P}{\partial x_P} + v_P\frac{\partial v_P}{\partial y_P} &= -\frac{\partial p_P}{\partial y_P} + T_P + \frac{1}{Re_P}\left(\frac{\partial^2 v_P}{\partial x_P^2} + \frac{\partial^2 v_P}{\partial y_P^2}\right) \\
u_P\frac{\partial T_P}{\partial x_P} + v_P\frac{\partial T_P}{\partial y_P} &= \frac{1}{Pr\ Re_P}\left(\frac{\partial^2 T_P}{\partial x_P^2} + \frac{\partial^2 T_P}{\partial y_P^2}\right)
\end{aligned} \tag{A4}$$

Die Lösung muß den Randbedingungen gehorchen ($x_P > o$)

$$y_P = o: \; u_P = o \quad v_P = o \quad T_P = 1$$

$$y_P \to \infty: \; u_P = 1 \quad T_P = o$$

Die beiden Parameter Re_P und Pr der Lösung sind dabei definiert als

Reynolds-Zahl
$$Re_P = \frac{U_o^3}{g\,\beta_o\,(T_W - T_o)\,\nu} \tag{A5a}$$

Prandtl-Zahl
$$Pr = \frac{\nu}{a} \tag{A5b}$$

Ein weiterer Parameter des Problems, die Archimedes-Zahl Ar, tritt weder in den Gleichungen noch in den Randbedingungen explizit auf. Der Grund hierfür liegt in der Wahl der Bezugslänge L_p. Bei Problemen mit geometrisch ausgezeichneten Längen wäre es natürlicher, diese als Bezugslänge zu wählen. In diesem Falle erhielte man statt Gl (A4c)

$$u_p \frac{\partial v_p}{\partial x_p} + v_p \frac{\partial v_p}{\partial y_p} = - \frac{\partial p_p}{\partial y_p} + Ar\, T_p + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v_p}{\partial x_p^2} + \frac{\partial^2 v_p}{\partial y_p^2}\right) \qquad \text{(A4c')}$$

mit

$$Ar = \frac{U_o^2}{g\,\beta_o\,(T_W - T_o)\,L} \qquad Re = \frac{U_o\,L}{\nu}$$

und sämtliche Längen in den Gln (A4) wären mit dieser Bezugslänge dimensionslos gemacht. Auch die Archimedes-Zahl taucht dann wieder auf. Das vorliegende Beispiel wird noch auf Prandtl-Zahlen von der Größenordnung Eins beschränkt. Diese Annahme ist für Luft und Wasser erfüllt. Zur Abschätzung der Größenordnung der Glieder der Differentialgleichungen wird zusätzlich zur Wahl der Bezugsgrößen in Gln (A4) ein entsprechender Potenzansatz für die Variablen gemacht. Die Annahme großer Reynolds-Zahlen wird darin durch Streckung der y_p-Koordinate und der v_p-Komponente der Geschwindigkeit mit der Wurzel der Reynolds-Zahl berücksichtigt. Dieser Ansatz folgt der Vorgehensweise bei der Plattenströmung ohne Auftrieb.

$$\bar{x}_P = x_P$$

$$\bar{y}_P = y_P \, x_P^{-\frac{1}{2}} \sqrt{Re_P}$$

$$u_P(x_P,y_P) = \bar{u}_P(\bar{x}_P,\bar{y}_P)$$

$$v_P(x_P,y_P) = -\frac{1}{2}\bar{x}_P^{-\frac{1}{2}}(\bar{v}_P(\bar{x}_P,\bar{y}_P) - \bar{y}_P\,\bar{u}_P(\bar{x}_P,\bar{y}_P))\frac{1}{\sqrt{Re_P}} \qquad (A6)$$

$$p_P(x_P,y_P) = \bar{p}_P(\bar{x}_P,\bar{y}_P) - \frac{1}{2}$$

$$T_P(x_P,y_P) = \bar{T}_P(\bar{x}_P,\bar{y}_P)$$

Die 4 Differentialgleichungen reduzieren sich damit auf 2 für $\bar{u}_P(\bar{x}_P,\bar{y}_P)$ und $\bar{T}_P(\bar{x}_P,\bar{y}_P)$

$$\bar{u}_P\,\bar{x}_P\frac{\partial\bar{u}_P}{\partial\bar{x}_P} - (\frac{1}{2}\bar{v}_P + \bar{x}_P\frac{\partial\bar{v}_P}{\partial\bar{x}_P})\frac{\partial\bar{u}_P}{\partial\bar{y}_P} - \frac{\partial^2\bar{u}_P}{\partial\bar{y}_P^2} +$$
$$+ (\frac{\bar{x}_P}{Re_P})^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}\bar{p}_P + \bar{x}_P\frac{\partial\bar{p}_P}{\partial\bar{x}_P} - \frac{1}{2}\bar{y}_P\bar{T}_P) +$$
$$+ (\frac{1}{\bar{x}_P\,Re_P})\{[\frac{\partial^2 u_P}{\partial x_P^2}] + [\frac{\partial^2 v_P}{\partial y_P^2}] + [u_P\frac{\partial v_P}{\partial x_P} + v_P\frac{\partial v_P}{\partial y_P}]\} +$$
$$+ (\frac{1}{\bar{x}_P\,Re_P})^2[\frac{\partial^2 v_P}{\partial x_P^2}] = 0 \qquad (A7)$$

$$\bar{u}_P\,\bar{x}_P\frac{\partial\bar{T}_P}{\partial\bar{x}_P} - (\frac{1}{2}\bar{v}_P + \bar{x}_P\frac{\partial\bar{v}_P}{\partial\bar{x}_P})\frac{\partial\bar{T}_P}{\partial\bar{y}_P} - \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2\bar{T}_P}{\partial\bar{y}_P^2} +$$
$$+ (\frac{1}{\bar{x}_P\,Re_P})[\frac{1}{Pr}\frac{\partial^2\bar{T}_P}{\partial\bar{x}_P^2}] = 0$$

und 2 Integralbeziehungen für $\bar{v}_P(\bar{x}_P,\bar{y}_P)$ und $\bar{p}_P(\bar{x}_P,\bar{y}_P)$

$$\bar{p}_P(\bar{x}_P,\bar{y}_P) = \int_{\bar{y}_P}^{\infty}\bar{T}_P(\bar{x}_P,\bar{\bar{y}})\,d\bar{\bar{y}}$$

$$\bar{v}_P(\bar{x}_P,\bar{y}_P) = \int_{0}^{\bar{y}_P}\bar{u}_P(\bar{x}_P,\bar{\bar{y}})\,d\bar{\bar{y}} \qquad (A7)$$

Die Darstellung in eckigen Klammern in Gln (A7) ebenso wie später in Gln (A16) soll andeuten, welches Glied aus

Gl (A4) durch den entsprechenden Ausdruck wiedergegeben ist. Der Klammerausdruck möge dabei nach der Transformation die Größenordnung Eins haben. Der Faktor davor gibt dann die wirkliche Größe des Gliedes an. 3 Fälle lassen sich so durch unterschiedliches Verhalten der Gleichungen bei großen Reynolds-Zahlen kennzeichnen

P1	Plattenvorderkante	$x_P = O(1/Re_P)$	
P2	mittlerer Abstand	$x_P = O(1)$	(A8)
P3	großer Abstand	$x_P = O(Re_P)$	

Im Fall P1 muß das vollständige Gleichungssystem (Gln (A7)) gelöst werden. Es können keine Terme vernachlässigt werden.

Bei mittleren Abständen von der Vorderkante (Fall P2) fallen alle Glieder mit x_P/Re_P und $1/(x_P Re_P)$ weg, wenn die Reynolds-Zahl den Grenzwert Unendlich annimmt. Die entstehende Gleichung ist identisch mit der für die längsangeströmte Platte ohne Auftrieb aus der klassischen Grenzschichttheorie (vergl. Schlichting (1980)):

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = o$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = a \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \qquad (A9)$$

$$y^* = o: \; u^* = o \quad v^* = o \quad T^* = T_W$$

$$y^* \to \infty: \; u^* = U_o \quad T^* = T_o$$

Der Auftrieb ist also in diesem Bereich vernachlässigbar. Im Bereich des Falles P3 bleibt zusätzlich noch das Glied mit $(x_P/Re_P)^{1/2}$ in Gl (A7a) erhalten. Der Auftrieb ist dort von gleicher Größenordnung wie die Trägheitskräfte der erzwungenen Konvektion. Die Gleichungen für diesen Bereich entsprechen denen nach dem Grenzprozeß in Kap. 3.

A1.2 Das Stewartson-Konzept

Die in Kap. A1.1 gemachte Abschätzung basierte auf einer bestimmten Wahl der Bezugsgrößen mit entsprechenden Ansätzen für die Lösungsfunktionen. Diese Wahl ist nicht eindeutig. Andere Bezugsgrößen und Ansätze können mit dem gleichen Recht verwendet werden. Folgende andere Wahl soll hier erörtert werden:

$$L_S = \left[\frac{\nu^2}{g\,\beta_o\,(T_W - T_o)}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$U_{BS} = \left[\nu\, g\, \beta_o\, (T_W - T_o)\right]^{\frac{1}{3}} \qquad \text{(A10)}$$

Die auf L_S und U_{BS} bezogenen Größen werden mit dem Index s versehen, z.B. $x_S = x^*/L_S$ oder $u_S = u^*/U_{BS}$. Die Bezugstemperatur ist dieselbe wie vorher

$$T_{BS} = T_W - T_o \qquad \text{(A10c)}$$

ebenso wie die dimensionslose Temperaturdifferenz. Auch die Druckdifferenz p** wird entsprechend Kap. A1.1, jedoch mit dem Staudruck der neuen Bezugsgeschwindigkeit dimen-

sionslos gemacht. Dies ergibt dann folgendes dimensionsloses Gleichungssystem:

$$\frac{\partial u_S}{\partial x_S} + \frac{\partial v_S}{\partial y_S} = o$$

$$u_S\frac{\partial u_S}{\partial x_S} + v_S\frac{\partial u_S}{\partial y_S} = -\frac{\partial p_S}{\partial x_S} + \frac{\partial^2 u_S}{\partial x_S^2} + \frac{\partial^2 u_S}{\partial y_S^2}$$

$$u_S\frac{\partial v_S}{\partial x_S} + v_S\frac{\partial v_S}{\partial y_S} = -\frac{\partial p_S}{\partial y_S} + T_S + \frac{\partial^2 v_S}{\partial x_S^2} + \frac{\partial^2 v_S}{\partial y_S^2} \qquad \text{(A11)}$$

$$u_S\frac{\partial T_S}{\partial x_S} + v_S\frac{\partial T_S}{\partial y_S} = \frac{1}{Pr}\left(\frac{\partial^2 T_S}{\partial x_S^2} + \frac{\partial^2 T_S}{\partial y_S^2}\right)$$

mit den Randbedingungen ($x_S > o$)

$$y_S = o\text{: } u_S = o \quad v_S = o \quad T_S = 1$$

$$y_S \to \infty\text{: } u_S = U_S \qquad T_S = o$$

In dieser Form sind die Gleichungen nur von der Prandtl-Zahl Pr abhängig. Falls man die Bezugslänge statt mit den Konstanten (Gl (A10a)) mit einer geometrischen Länge bilden würde, tritt die Archimedes-Zahl in Gl (A11c) explizit auf (vergl. Kap. A1.1 Gl (A4c)). Die Reynolds-Zahl kommt hier in den Gleichungen nicht vor. Man findet sie aber in den Randbedingungen (siehe Kap. 2.2), die nun lauten:

$$U_S = Re_P^{1/3} \qquad \text{(A12)}$$

Die Variablen in Gl (A11) sind also nicht die Oseen-Variablen, die bekanntlich das Gleichungssystem ebenfalls von der Reynolds-Zahl frei machen. Das beweist auch die Beziehung zwischen x_P und x_S

$$x_S = x_P\, Re_P^{2/3} \qquad \text{(A13)}$$

Die entsprechende Oseen-Variable lautet jedoch

$$x_{Oseen} = x_p \, Re_p \tag{A14}$$

Es soll auch diesmal wieder ein Ansatz für die Lösungsfunktionen gemacht werden (vergl. Stewartson (1958))

$$\begin{aligned}
x_S &= \bar{x}_S \\
y_S &= \bar{y}_S \, \bar{x}_S^{2/5} \\
u_S(x_S,y_S) &= \bar{x}_S^{1/5} \, \bar{u}_S(\bar{x}_S,\bar{y}_S) \\
v_S(x_S,y_S) &= -\frac{1}{5} \, \bar{x}_S^{-2/5} \, (3\,\bar{v}_S(\bar{x}_S,\bar{y}_S) - 2\,\bar{y}_S \, \bar{u}_S(\bar{x}_S,\bar{y}_S)) \\
p_S(x_S,y_S) &= \bar{x}_S^{2/5} [\bar{p}_S(\bar{x}_S,\bar{y}_S) - \frac{1}{2} \, \bar{u}_{S,\infty}^2(\bar{x}_S)] \\
T_S(x_S,y_S) &= \bar{T}_S(\bar{x}_S,\bar{y}_S)
\end{aligned} \tag{A15}$$

Das Gleichungssystem (Gln (A11)) lautet dann in transformierter Form

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{5} \, (\bar{u}_S^2 - \bar{u}_{S,\infty}^2) + \bar{x}_S \, \bar{u}_S \, \frac{\partial \bar{u}_S}{\partial \bar{x}_S} - \bar{x}_S \, (\bar{u}_S \, \frac{\partial \bar{u}_S}{\partial \bar{x}_S})_\infty - \\
&- (\frac{3}{5} \, \bar{v}_S + \bar{x}_S \, \frac{\partial \bar{v}_S}{\partial \bar{x}_S}) \, \frac{\partial \bar{u}_S}{\partial \bar{y}_S} - \frac{\partial^2 \bar{u}_S}{\partial \bar{y}_S^2} + \frac{2}{5} \, \bar{p}_S + \bar{x}_S \, \frac{\partial \bar{p}_S}{\partial \bar{x}_S} - \frac{2}{5} \, \bar{y}_S \, \bar{T}_S + \\
&+ \bar{x}_S^{-\frac{6}{5}} \{[\frac{\partial^2 u_S}{\partial x_S^2}] + [u_S \frac{\partial v_S}{\partial x_S} + v_S \frac{\partial v_S}{\partial y_S}] + [\frac{\partial^2 v_S}{\partial y_S^2}]\} + \\
&+ \bar{x}_S^{-\frac{12}{5}} [\frac{\partial^2 v_S}{\partial x_S^2}] = 0
\end{aligned} \tag{A16}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{u}_S \, \bar{x}_S \, \frac{\partial \bar{T}_S}{\partial \bar{x}_S} - (\frac{3}{5} \, \bar{v}_S + \bar{x}_S \, \frac{\partial \bar{v}_S}{\partial \bar{x}_S}) \, \frac{\partial \bar{T}_S}{\partial \bar{y}_S} - \frac{1}{Pr} \, \frac{\partial^2 \bar{T}_S}{\partial \bar{y}_S^2} + \\
&+ \bar{x}_S^{-\frac{6}{5}} [\frac{1}{Pr} \, \frac{\partial^2 T_S}{\partial x_S^2}] = 0
\end{aligned}$$

mit

$$\bar{v}_S = \int_0^{\bar{y}_S} \bar{u}_S \, d\bar{\bar{y}}$$

$$\bar{p}_S = -\int_{\bar{y}_S}^{\infty} \bar{T}_S \, d\bar{\bar{y}}$$

Dazu gehören die Randbedingungen Gl (A11e)($\bar{x}_S > 0$), die hier lauten:

$\bar{y}_S = 0$: $\bar{u}_S = 0$ $\quad \bar{v}_S = 0$ $\qquad\qquad \bar{T}_S = 1$

$\bar{y}_S \to \infty$: $\bar{u}_S = \bar{u}_{S,\infty}$ $\qquad\qquad \bar{p}_S = 0$ $\quad \bar{T}_S = 0$

mit

$$\bar{u}_{S,\infty} = \bar{x}_S^{-1/5} \, U_S$$

Wieder sind aufgrund der Gleichungen 3 Bereiche von x_S mit unterschiedlichen Näherungen zu unterscheiden, die sich durch Vernachlässigung einzelner Glieder ergeben würden

S1	Plattenvorderkante	$x_S = O(1)$	
S2	mittlerer Bereich	$x_S = O(Re_P^{5/3})$	(A17)
S3	großer Entfernung	$x_S \to \infty$	

Im ersten Fall gilt wie in Kap. A1.1 bei P1 die vollständige Gleichung. Beim Fall S2 können die Glieder in den eckigen Klammern, die von $O(x_S^{-6/5})$ und $O(x_S^{-12/5})$ sind, vernachlässigt werden. Für sehr große x_S (Fall S3) ist der Grenzübergang $\bar{u}_{S,\infty} \to 0$ zusätzlich möglich (vergl. Gl (A16c)). Eine Rücktransformation zeigt, daß sich im Fall S3 das von Stewartson (1958) für die freie Konvektion an der horizontalen Platte vorgeschlagene Gleichungssystem ergibt.

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = o$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p^{**}}{\partial x^*} + \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$o = - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p^{**}}{\partial y^*} + g \beta_o (T_W - T_o)$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = a \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \qquad \text{(A18)}$$

$$y^* = o: \; u^* = o \quad v^* = o \qquad T^* = T_W$$

$$y^* \to \infty: \; u^* = o \qquad p^{**} = o \quad T^* = T_o$$

Die Stewartson-Näherung gilt für eine freie Konvektionsströmung ohne Effekte erzwungener Konvektion. Die Geschwindigkeit bei großen Wandabständen muß Null sein.

A1.3 Zusammenfassende Bemerkungen

Die beiden Systeme dieses Kapitels (Gln (A4) und (A11)) sind 2 von vielen möglichen, die sich je nach Wahl der Bezugsgrößen ergeben. Von der Wahl unbeeinflußt bleibt die Lösung des vollständigen Gleichungssystems (Fälle P1 und S1). Mit den entsprechenden Rücktransformationen hat Gl (A16) die gleiche Lösung wie Gl (A7). Auch von den bisherigen abweichende Transformationen bzw. Bezugsgrößen würden das gleiche Ergebnis liefern, jedoch nur, solange man die vollständigen Gleichungen löst.
Das ändert sich, sobald in den Gleichungen Näherungen durchgeführt werden. Die Bezugsgrößen werden bekanntlich deshalb eingeführt, um unterschiedliche Größenordnung der

einzelnen Gliedern der Gleichungen erkennen zu können. Diese Unterschiede sind häufig mit einem Parameter verknüpft, der ein Maß für das Verhältnis verschiedener Glieder untereinander sein soll. In den Impulsgleichungen z.B. sind diese Parameter die Verhältnisse der verschiedenen Kräfte wie Trägheits-, Auftriebs- oder Reibungskräfte. Sind einzelne Kräfte kleiner als andere, so würde man sie gerne vernachlässigen, um den Lösungsaufwand zu verringern. Die bisherige Untersuchung hat bei 2 Bezugssystemen insgesamt 4 mögliche Näherungen festgestellt. Andere Bezugssystemen sind theoretisch denkbar (siehe Anhang A2) und können weitere Näherungen ergeben. Doch nicht alle ihre Lösungen wären verschieden.

Das zeigt schon ein Vergleich der bisher erhaltenen 4 Näherungen. Die Bedingungen für die Fälle P3 und S2 kennzeichnen dieselbe Größenordnung für den Abstand von der Vorderkante. Auch die genäherten Gleichungen berücksichtigen dieselben Glieder, wie man durch Rücktransformation aus Gl (20) und Gl (7) in das dimensionsbehaftete Gleichungssystem zeigen kann. Man erhält beide Male die Gleichung

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{**}}{\partial x^*} + \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$0 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{**}}{\partial y^*} + g \beta_0 (T_W - T_0) \qquad \text{(A19)}$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = a \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = o$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p^{**}}{\partial x^*} + \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$o = - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p^{**}}{\partial y^*} + g \beta_o (T_W - T_o)$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = a \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \qquad \text{(A18)}$$

$$y^* = o: \; u^* = o \quad v^* = o \qquad T^* = T_W$$

$$y^* \to \infty: \; u^* = o \qquad p^{**} = o \quad T^* = T_o$$

Die Stewartson-Näherung gilt für eine freie Konvektionsströmung ohne Effekte erzwungener Konvektion. Die Geschwindigkeit bei großen Wandabständen muß Null sein.

A1.3 Zusammenfassende Bemerkungen

Die beiden Systeme dieses Kapitels (Gln (A4) und (A11)) sind 2 von vielen möglichen, die sich je nach Wahl der Bezugsgrößen ergeben. Von der Wahl unbeeinflußt bleibt die Lösung des vollständigen Gleichungssystems (Fälle P1 und S1). Mit den entsprechenden Rücktransformationen hat Gl (A16) die gleiche Lösung wie Gl (A7). Auch von den bisherigen abweichende Transformationen bzw. Bezugsgrößen würden das gleiche Ergebnis liefern, jedoch nur, solange man die vollständigen Gleichungen löst.
Das ändert sich, sobald in den Gleichungen Näherungen durchgeführt werden. Die Bezugsgrößen werden bekanntlich deshalb eingeführt, um unterschiedliche Größenordnung der

einzelnen Gliedern der Gleichungen erkennen zu können. Diese Unterschiede sind häufig mit einem Parameter verknüpft, der ein Maß für das Verhältnis verschiedener Glieder untereinander sein soll. In den Impulsgleichungen z.B. sind diese Parameter die Verhältnisse der verschiedenen Kräfte wie Trägheits-, Auftriebs- oder Reibungskräfte. Sind einzelne Kräfte kleiner als andere, so würde man sie gerne vernachlässigen, um den Lösungsaufwand zu verringern. Die bisherige Untersuchung hat bei 2 Bezugssystemen insgesamt 4 mögliche Näherungen festgestellt. Andere Bezugssystemen sind theoretisch denkbar (siehe Anhang A2) und können weitere Näherungen ergeben. Doch nicht alle ihre Lösungen wären verschieden.

Das zeigt schon ein Vergleich der bisher erhaltenen 4 Näherungen. Die Bedingungen für die Fälle P3 und S2 kennzeichnen dieselbe Größenordnung für den Abstand von der Vorderkante. Auch die genäherten Gleichungen berücksichtigen dieselben Glieder, wie man durch Rücktransformation aus Gl (20) und Gl (7) in das dimensionsbehaftete Gleichungssystem zeigen kann. Man erhält beide Male die Gleichung

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{**}}{\partial x^*} + \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$0 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{**}}{\partial y^*} + g \beta_0 (T_W - T_0) \qquad \text{(A19)}$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = a \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$$

Für die Randbedingungen ergibt sich ($x^* > 0$)

$$y^* = 0: \; u^* = 0 \quad v^* = 0 \qquad T^* = T_W$$

$$y^* \to \infty: \; u^* = U_0 \qquad p^{**} = -\frac{1}{2}U_0^2 \quad T^* = T_0$$

Die Gleichungen sind identisch mit Gln (A18). Nur die Randbedingungen für große Wandabstände ($y^* \to \infty$) haben sich geändert.

Damit bleiben 4 Bereiche bzw. Näherungen übrig. Sie sind bei der längsangeströmten Platte mit Auftrieb auch physikalisch unterscheidbar:

1. die Vorderkante; die nur mit den vollständigen Gleichungen beschrieben werden kann
2. der Bereich mit vernachlässigbarem Auftrieb (Prandtl (1904); Gersten u. d'Avila (1977))
3. ein Übergangsbereich mit Auftrieb und erzwungener Konvektion von gleicher Größenordnung
4. der Bereich mit vernachlässigbarer erzwungener Konvektion (Stewartson (1958))

Die 4 Bereiche sind in beiden Transformationen enthalten; wobei davon jedoch nur 3 jeweils durch die Bedingungen Gl (A8) und (A17) unterschieden werden. Bereich (4) ist zusätzlich im ersten Bezugssystem hinter P3; Bereich (2) im zweiten zwischen S1 und S2 zu finden (Bild 15). Lösungen für den Bereich (2) sind Lösungen der klassischen Grenzschichtgleichungen (Prandtl). Für den Bereich (4)

hat Stewartson (1958) ebenfalls eine Grenzschichtlösung angegeben. Grenzschichtnäherungen für den Bereich (3) erhält man aus der Entwicklung in Kap. 3. Der dort gemachte Grenzprozeß ist also nicht nur physikalisch sinnvoll, sondern auch zur vollständigen Beschreibung der Strömung bei großen Reynolds-Zahlen notwendig.

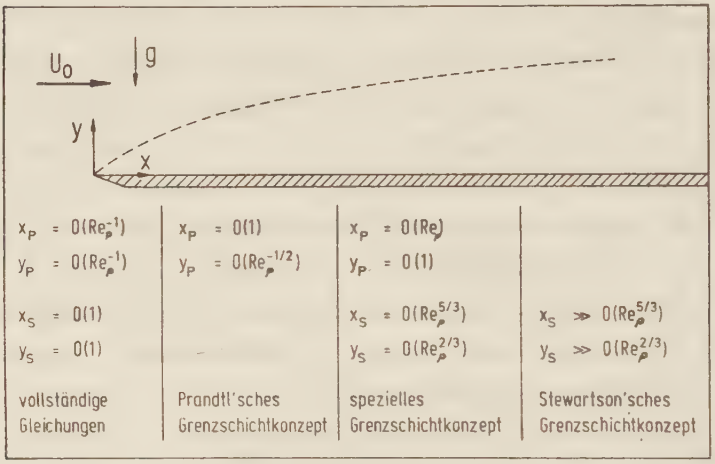

Bild 15: Mögliche Näherungslösungen für die Strömung mit Auftrieb an der Platte (T_W = konst)

A2. Herleitung der Grenzschichtgleichungen für Auftriebsbezugsgrößen

Die in Kap. 3 gemachte Grenzschichtentwicklung basiert auf einer bestimmten Wahl der Bezugsgrößen und des Grenzprozesses. Verschiedene mögliche Annahmen und ihre Auswirkungen auf die Näherung bei großen Reynolds-Zahlen

sind im Anhang A1 beschrieben. In diesem Kapitel soll das Grenzschichtkonzept noch einmal für ein anderes Bezugssystem entwickelt werden. Die hier vorliegende Entwicklung ist identisch mit der in Kap. 3, wenn man darin die Transformation aus Kap. 4.3 berücksichtigt. Es wird ein Bezugssystem gewählt, bei dem entweder Bezugsgeschwindigkeit U_{BF} oder -länge L_F oder beide so gebildet sind, daß

$$Ar = \frac{g\, L_F\, \beta_o\, T_{BF}}{U_o^2} = 1 \qquad \text{(A20)}$$

Damit verschwindet die Archimedes-Zahl in den Gleichungen. Sie lauten mit den neuen dimensionslosen Variablen

$$x_F = \frac{x^*}{L_F} \qquad y_F = \frac{y^*}{L_F}$$

$$u_F = \frac{u^*}{U_{BF}} \qquad v_F = \frac{v^*}{U_{BF}} \qquad \text{(A21)}$$

$$p_F = \frac{p^*}{\rho_o U_{BF}^2} \qquad T_F = \frac{T^* - T_o}{T_{BF}}$$

$$\frac{\partial u_F}{\partial x_F} + \frac{\partial v_F}{\partial y_F} = 0$$

$$u_F \frac{\partial u_F}{\partial x_F} + v_F \frac{\partial u_F}{\partial y_F} = - \frac{\partial p_F}{\partial x_F} + \frac{1}{Re_F} \left(\frac{\partial^2 u_F}{\partial x_F^2} + \frac{\partial^2 u_F}{\partial y_F^2} \right)$$

$$u_F \frac{\partial v_F}{\partial x_F} + v_F \frac{\partial v_F}{\partial y_F} = - \frac{\partial p_F}{\partial y_F} + T_F + \frac{1}{Re_F} \left(\frac{\partial^2 v_F}{\partial x_F^2} + \frac{\partial^2 v_F}{\partial y_F^2} \right) \qquad \text{(A22)}$$

$$u_F \frac{\partial T_F}{\partial x_F} + v_F \frac{\partial T_F}{\partial y_F} = \frac{1}{Pr\ Re_F} \left(\frac{\partial^2 T_F}{\partial x_F^2} + \frac{\partial^2 T_F}{\partial y_F^2} \right)$$

Die Reynolds-Zahl Re_F ist hier definiert als

$$Re_F = \frac{U_{BF}\, L_F}{\nu} \tag{A23}$$

Die Archimedes-Zahl taucht in Gln (A22) explizit nicht mehr auf. Sind jedoch in den Randbedingungen sowohl natürliche Längen als auch Geschwindigkeiten vorhanden, so wird man als neue dimensionslose Kennzahl ein Geschwindigkeits- oder Längenverhältnis in den Randbedingungen erhalten. Dieses tritt an die Stelle der Archimedes-Zahl bei den Parametern der abhängigen Variablen. Gibt es für eine Bezugsgröße keine natürliche Größe, so wählt man nur hierfür eine entsprechende Kombination aus Randbedingungen und Konstanten zur Elimination der Archimedes-Zahl. Bei selbstähnlichen Problemen, die sich durch Fehlen einer geometrischen Länge auszeichnen, ist dies die Bezugslänge. Die Entwicklung wird analog zu Gln (54) durchgeführt. Entwicklungsparameter ist hier aber die Reynolds-Zahl Re_F.

$$\begin{aligned}
x_F &= \hat{x}_F\, Re_F^{n_x} \\
y_F &= \hat{y}_F\, Re_F^{n_y} \\
u_F &= Re_F^{n_u}\, (\hat{u}_{F1} + \hat{\varepsilon}\, \hat{u}_{F2} + \ldots.) \\
v_F &= Re_F^{n_v}\, (\hat{v}_{F1} + \hat{\varepsilon}\, \hat{v}_{F2} + \ldots.) \\
p_F &= Re_F^{n_p}\, (\hat{p}_{F1} + \hat{\varepsilon}\, \hat{p}_{F2} + \ldots.) \\
T_F &= Re_F^{n_T}\, (\hat{T}_{F1} + \hat{\varepsilon}\, \hat{T}_{F2} + \ldots.)
\end{aligned} \tag{A24}$$

Nach Einsetzen der transformierten unabhängigen und der 1. Ordnung der Entwicklung der abhängigen Variablen aus Gl (A24) in Gl (A22) erhält man Glieder unterschiedlicher Potenz der Reynolds-Zahl in der neuen Gleichung

$$Re_F^{n_u - n_x} \frac{\partial \hat{u}_{F1}}{\partial \hat{x}_F} + Re_F^{n_v - n_y} \frac{\partial \hat{v}_{F1}}{\partial \hat{y}_F} = 0$$

$$Re_F^{2n_u - n_x} \hat{u}_{F1} \frac{\partial \hat{u}_{F1}}{\partial \hat{x}_F} + Re_F^{n_v + n_u - n_y} \hat{v}_{F1} \frac{\partial \hat{u}_{F1}}{\partial \hat{y}_F} =$$

$$= - Re_F^{n_p - n_x} \frac{\partial \hat{p}_{F1}}{\partial \hat{x}_F} +$$

$$+ Re_F^{n_u - 2n_x - 1} \frac{\partial^2 \hat{u}_{F1}}{\partial \hat{x}_F^2} + Re_F^{n_u - 2n_y - 1} \frac{\partial^2 \hat{u}_{F1}}{\partial \hat{y}_F^2} \qquad \text{(A25)}$$

$$Re_F^{n_u + n_v - n_x} \hat{u}_{F1} \frac{\partial \hat{v}_{F1}}{\partial \hat{x}_F} + Re_F^{2n_v - n_y} \hat{v}_{F1} \frac{\partial \hat{v}_{F1}}{\partial \hat{y}_F} =$$

$$= - Re_F^{n_p - n_y} \frac{\partial \hat{p}_{F1}}{\partial \hat{y}_F} + Re_F^{n_T} \hat{T}_{F1} +$$

$$+ Re_F^{n_v - 2n_x - 1} \frac{\partial^2 \hat{v}_{F1}}{\partial \hat{x}_F^2} + Re_F^{n_v - 2n_y - 1} \frac{\partial^2 \hat{v}_{F1}}{\partial \hat{y}_F^2}$$

$$Re_F^{n_u + n_T - n_x} \hat{u}_{F1} \frac{\partial \hat{T}_{F1}}{\partial \hat{x}_F} + Re_F^{n_v + n_T - n_y} \hat{v}_{F1} \frac{\partial \hat{T}_{F1}}{\partial \hat{y}_F} =$$

$$\frac{1}{Pr} \left(Re_F^{n_T - 2n_x - 1} \frac{\partial^2 \hat{T}_{F1}}{\partial \hat{x}_F^2} + Re_F^{n_T - 2n_y - 1} \frac{\partial^2 \hat{T}_{F1}}{\partial \hat{y}_F^2} \right)$$

Nun müssen die Exponenten der Reynolds-Zahl so bestimmt werden, daß

a) Anzahl der Unbekannten
b) Anzahl der Gleichungen
c) die höchsten Ableitungen zur Erfüllung aller Randbedingungen
d) und das Auftriebsglied erhalten bleiben.
e) Die Grenzschichtlösung muß an die Außenlösung (reibungsloses Problem) anpaßbar sein.

Diese Bedingungen kennzeichnen im vorliegenden Problem die Forderung nach der geringsten Degeneration der Gleichungen. Die klassischen Grenzschichtgleichungen dagegen sind durch die Bedingungen a) - c) und e) bestimmt. Die Bedingungen a) - d) enthalten 4 Beziehungen für die unbekannten Exponenten

$$\begin{aligned} n_u - n_x &= n_v - n_y \\ 2n_u - n_x &= m_p - n_x = n_u - 2n_y - 1 \\ n_p - n_y &= n_T \\ n_u + n_x + 1 &> 0 \end{aligned} \qquad \text{(A26)}$$

Eingesetzt in Gl (A25) erhält man das Gleichungssystem für Grenzschichtströmungen mit Auftrieb an horizontalen Wänden.

$$\frac{\partial \hat{u}_{F1}}{\partial \hat{x}_F} + \frac{\partial \hat{v}_{F1}}{\partial \hat{y}_F} = 0$$

$$\hat{u}_{F1} \frac{\partial \hat{u}_{F1}}{\partial \hat{x}_F} + \hat{v}_{F1} \frac{\partial \hat{u}_{F1}}{\partial \hat{y}_F} = - \frac{\partial \hat{p}_{F1}}{\partial \hat{x}_F} + \frac{\partial^2 \hat{u}_{F1}}{\partial \hat{y}_F^2}$$

$$\frac{\partial \hat{p}_{F1}}{\partial \hat{y}_F} = \hat{T}_{F1}$$

$$\hat{u}_{F1} \frac{\partial \hat{T}_{F1}}{\partial \hat{x}_F} + \hat{v}_{F1} \frac{\partial \hat{T}_{F1}}{\partial \hat{y}_F} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \hat{T}_{F1}}{\partial \hat{y}_F^2} \qquad \text{(A27)}$$

$\hat{x}_F = 0$: $\hat{u}_{F1} = \hat{u}_{F1,o}(\hat{y})$ $\quad \hat{v}_{F1} = \hat{v}_{F1,o}(\hat{y})$

$\hat{p}_{F1} = \hat{p}_{F1,o}(\hat{y})$ $\quad \hat{T}_{F1} = \hat{T}_{F1,o}(\hat{y})$

$\hat{y}_F = 0$: $\hat{u}_{F1} = 0$ $\quad \hat{v}_{F1} = 0$ $\quad \hat{T}_{F1} = \hat{T}_{F1,W}$

$\hat{y}_F \to \infty$: $\hat{u}_{F1} = \hat{U}_{F1}$ $\quad \hat{p}_{F1} = -\frac{1}{2}\hat{U}_{F1}$ $\quad \hat{T}_{F1} = 0$

Es ist identisch mit dem aus Kap. 4.3 (Gl (56)). Auch die Variablen in 1. Ordnung erfahren die gleiche Streckung bezüglich der Reynolds-Zahl wie dort. Voraussetzung dafür ist die analoge Wahl der 2 freien Exponenten in der Transformation der Variablen. Die Wahl richtet sich wieder nach den endlichen Randbedingungen wie in Kap. 4.3. Gl (A27) sind die Grenzschichtgleichungen 1.Ordnung. Zur Herleitung der Gleichungen 2. Ordnung sind die nächsten Glieder bei den abhängigen Variablen in Gl (A24) notwendig. Vorher muß der Störparameter $\hat{\varepsilon}$ bestimmt werden. Ähnlich wie in Kap. 3 wird er durch Anpassung an die Außenlösung ermittelt. Aus der Anpaßvorschrift für ange-

paßte asymptotische Entwicklungen folgt für den Störparameter $\hat{\varepsilon}$

$$\hat{\varepsilon} = Re_F^{n_v - n_u} \tag{A28}$$

Mit der Bestimmung des Störparameters ist die Herleitung der Grenzschichtgleichungen 2. Ordnung möglich. Mit Gl (A22), (A24) und (A28) erhält man

$$\frac{\partial \hat{u}_{F2}}{\partial \hat{x}_F} + \frac{\partial \hat{v}_{F2}}{\partial \hat{y}_F} = 0$$

$$\hat{u}_{F1}\frac{\partial \hat{u}_{F2}}{\partial \hat{x}_F} + \hat{u}_{F2}\frac{\partial \hat{u}_{F1}}{\partial \hat{x}_F} + \hat{v}_{F1}\frac{\partial \hat{u}_{F2}}{\partial \hat{y}_F} + \hat{v}_{F2}\frac{\partial \hat{u}_{F1}}{\partial \hat{y}_F} = -\frac{\partial \hat{p}_{F2}}{\partial \hat{x}_F} + \frac{\partial^2 \hat{u}_{F2}}{\partial \hat{y}_F^2}$$

$$\frac{\partial \hat{p}_{F2}}{\partial \hat{y}_F} = \hat{T}_{F2} \tag{A29}$$

$$\hat{u}_{F1}\frac{\partial \hat{T}_{F2}}{\partial \hat{x}_F} + \hat{u}_{F2}\frac{\partial \hat{T}_{F1}}{\partial \hat{x}_F} + \hat{v}_{F1}\frac{\partial \hat{T}_{F2}}{\partial \hat{y}_F} + \hat{v}_{F2}\frac{\partial \hat{T}_{F1}}{\partial \hat{y}_F} = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 \hat{T}_{F2}}{\partial \hat{y}_F^2}$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned}
&\hat{x}_F = 0: \ \hat{u}_{F2} = \hat{u}_{F2,0}(\hat{y}_F) \quad \hat{v}_{F2} = \hat{v}_{F2,0}(\hat{y}_F) \\
&\qquad \hat{p}_{F2} = \hat{p}_{F2,0}(\hat{y}_F) \quad \hat{T}_{F2} = \hat{T}_{F2,0}(\hat{y}_F) \\
&\hat{y}_F = 0: \ \hat{u}_{F2} = 0 \quad \hat{v}_{F2} = 0 \qquad\qquad \hat{T}_{F2} = 0 \\
&\hat{y}_F \to \infty: \ \hat{u}_{F2} = \hat{U}_{F2} \qquad \hat{p}_{F2} = -\hat{U}_{F1}\hat{U}_{F2} \quad \hat{T}_{F2} = 0
\end{aligned} \tag{A30}$$

Auch diese Gleichungen und die darin vorkommenden Variablen stimmen mit denen in Kap. 6.3 überein.

Somit ist die hier skizzierte angepaßte asymptotische Entwicklung von der Vorgehensweise zwar unterschiedlich zu der in Kap. 3 und 4.3 bzw. 6.3, in den Ergebnissen aber gleich. Ein genauer Vergleich zeigt, daß nur Transformation und Entwicklung vertauscht wurden.

L e b e n s l a u f

1948	Siegfried Schilawa, geb. am 11.12.48 in Arnsberg als Sohn des Bundesbahnbeamten Kurt Schilawa und seiner Ehefrau Erna Schilawa, geb. Timmermann
1955 - 1959	Besuch der Volksschule in Hagen
1959 - 1967	Besuch des neusprachlichen Gymnasiums Hagen
Juli 1967	Reifeprüfung
Sommer 1967	Grundpraktikum Stahlwerke Südwestfalen in Hagen
1967 - 1969	18-monatiger Grundwehrdienst Bundeswehr
1969 - 1974	Studium an der Ruhr-Universität Bochum Sommersemester 1969 Fachrichtung Wirtschaft ab Wintersemester 1969 Maschinenbau während Semesterferien Sommer 1972 Fachpraktikum Stahlwerke Südwestfalen
1974	Diplomprüfung
1974/75	Studienjahr am von Karman Institut Brüssel/Belgien
seit 1975	wiss. Assistent am Institut für Thermo- und Fluiddynamik der Ruhr-Universität Bochum Lehrstuhl Strömungslehre (Prof. Gersten)